René Guénon

I principi del calcolo infinitesimale

Loggia René Guénon
Milano

René Guénon
I principi del calcolo infinitesimale

Indice

Premessa

Benché il presente studio possa sembrare, almeno a prima vista, di un carattere un po' «speciale», ci è parso utile intraprenderlo al fine di precisare e spiegare più completamente certe nozioni alle quali ci è accaduto di fare riferimento nelle diverse occasioni in cui ci siamo serviti del simbolismo matematico, e questa ragione basterebbe insomma a giustificarlo senza dovervi insistere oltre. Dobbiamo dire tuttavia che ad essa si aggiungono altre ragioni secondarie, concernenti soprattutto quel che si potrebbe chiamare l'aspetto «storico» della questione; quest'ultimo, in effetti, non è del tutto privo d'interesse dal nostro punto di vista, nel senso che tutte le discussioni sollevate riguardo alla natura ed al valore del calcolo infinitesimale offrono un esempio stupefacente dell'assenza di principio che caratterizza le scienze profane, ossia le sole scienze che i moderni conoscano e persino concepiscano come possibili. Abbiamo spesso fatto notare come la maggior parte di tali scienze, anche nella misura in cui corrispondono ancora a qualche realtà, non rappresentino altro che residui snaturati di alcune delle antiche scienze tradizionali: è la parte inferiore di queste che, avendo cessato di essere posta in relazione coi principi, ed avendo perduto perciò il suo vero significato originario, ha finito per assumere uno sviluppo indipendente e per essere considerata una conoscenza sufficiente a se stessa, benché in verità il suo valore come conoscenza si trovi per ciò stesso ridotto quasi a nulla. Questo è evidente soprattutto nel caso delle scienze fisiche, ma, come abbiamo spiegato altrove[1], la stessa matematica moderna sotto tale aspetto non fa eccezione, se la si raffronta a quel che erano per gli antichi la scienza dei numeri e la geometria; e, quando parliamo qui degli antichi, occorre comprendervi anche l'antichità «classica», come il minimo studio delle teorie pitagoriche e platoniche basterebbe a mostrare, o almeno lo dovrebbe, se non si dovesse tener conto della straordinaria incomprensione di quanti pretendono attualmente di interpretarle; se tale incomprensione non fosse così completa, come si potrebbe sostenere, ad esempio, l'opinione di un'origine «empirica» delle scienze in questione, quando in realtà esse appaiono al contrario tanto più lontane da ogni «empirismo» quanto più si risale indietro nel tempo, come d'altronde avviene per ogni altra branca della conoscenza scientifica?

---

[1] Si veda *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, Gallimard, Paris, 1945; [trad. it.: *Il Regno della Quantità e i Segni dei Tempi*, Adelphi, Milano, 1982].

I matematici, nell'epoca moderna e più particolarmente ancora nell'epoca contemporanea, sembrano ormai giunti ad ignorare cosa sia veramente il numero; e con ciò non intendiamo parlare solamente del numero nel senso analogico e simbolico in cui l'intendevano i Pitagorici ed i Cabalisti, cosa fin troppo evidente, ma anche, per quanto possa apparire strano e quasi paradossale, del numero nella sua accezione semplicemente e propriamente quantitativa. Essi riducono, infatti, tutta la loro scienza al calcolo, secondo la concezione più ristretta possibile, intesa cioè come un insieme di procedimenti più o meno artificiali, valevoli unicamente per le applicazioni pratiche cui danno luogo: ciò significa in fondo che essi sostituiscono il numero con la cifra, e, del resto, questa confusione del numero con la cifra è così diffusa ai giorni nostri che la si potrebbe facilmente ritrovare ad ogni istante fin nelle espressioni del linguaggio corrente[2]. Ora la cifra, a rigore, non è che l'abito del numero; non diciamo il suo corpo, poiché è piuttosto la forma geometrica che, sotto certi aspetti, può essere legittimamente considerata il vero corpo del numero, come mostrano le teorie degli antichi sui poligoni ed i poliedri, posti in diretto rapporto col simbolismo dei numeri; e ciò si accorda d'altronde col fatto che ogni «incorporazione» implica necessariamente una «spazializzazione». Non vogliamo dire tuttavia che le cifre stesse siano segni interamente arbitrari, la cui forma sarebbe stata determinata dalla fantasia di uno o più individui; deve valere per i caratteri numerici quel che vale per i caratteri alfabetici, dai quali d'altronde non si distinguono in certe lingue[3], potendosi applicare sia agli uni sia agli altri la nozione di un'origine geroglifica, cioè ideografica o simbolica, comune a tutte le scritture senza eccezione, per quanto dissimulata possa essere tale origine in certi casi per deformazioni o alterazioni più o meno recenti.

Quel che è certo, è che i matematici impiegano nelle loro notazioni simboli di cui non conoscono più il significato, e che sono come vestigia di tradizioni dimenticate; la cosa più grave è che non solo non si chiedono più quale possa essere questo significato, ma sembrano persino non volere che ve ne sia uno. In effetti, essi tendono sempre più a reputare ogni notazione una semplice «convenzione», intendendo con ciò un qualcosa che sia posto

---

[2] Lo stesso accade agli «pseudo-esoteristi», i quali conoscono così poco ciò di cui vogliono parlare che non mancano mai di commettere questa stessa confusione nelle elucubrazioni di fantasia che hanno la pretesa di sostituire alla scienza tradizionale dei numeri!

[3] L'ebraico ed il greco rientrano in questo caso, come pure l'arabo prima che fosse introdotto l'uso delle cifre d'origine indiana, le quali in seguito, modificandosi in misura maggiore o minore, di là passarono nell'Europa del medioevo; si può notare a tale proposito che lo stesso vocabolo «cifra» non è altro che l'arabo *çifr*, benché quest'ultimo non sia in realtà che la designazione dello zero. È vero d'altra parte che in ebraico *saphar* significa «contare» o «numerare» quanto «scrivere», da cui *sepher*, «scrittura» o «libro» (in arabo *sifr,* che designa particolarmente un libro sacro), e *sephar* «numerazione» o «calcolo»; da quest'ultima parola proviene altresì la designazione delle *Sephiroth* della Cabala, che sono le «numerazioni» principiali assimilate agli attributi divini.

in maniera del tutto arbitraria, il che costituisce in fondo una vera impossibilità, poiché non si fa mai una convenzione qualsiasi senza avere qualche ragione di farla, e di fare precisamente quella anziché un'altra; solo a coloro che ignorano tale ragione la convenzione può apparire arbitraria, come a coloro che ignorano le cause di un avvenimento questo può apparire «fortuito»; è appunto quanto si verifica in tal caso, e si può vedere in ciò una delle estreme conseguenze dell'assenza di ogni principio, al punto da far perdere alla scienza - o sedicente tale, poiché allora essa non merita veramente più questo nome sotto alcun aspetto - ogni significato plausibile. D'altronde, proprio a causa della concezione attuale di una scienza esclusivamente quantitativa, detto «convenzionalismo» si estende poco a poco dalla matematica alle scienze fisiche, nelle loro teorie più recenti, le quali si allontanano così sempre più dalla realtà che pretendono spiegare; abbiamo sufficientemente insistito al riguardo in un'altra opera per poterci dispensare dal dirne ancora, tanto più che dobbiamo ora occuparci in modo particolare della sola matematica. Da questo punto di vista aggiungeremo soltanto che, quando si perde così completamente di vista il significato di una notazione, è fin troppo facile passare dall'uso legittimo e valido di essa ad un uso illegittimo, che non corrisponde più effettivamente a nulla e può persino risultare talvolta del tutto illogico; ciò può sembrare assai straordinario trattandosi di una scienza come la matematica, la quale dovrebbe avere con la logica legami particolarmente stretti, eppure è fin troppo vero che si possono rilevare molteplici illogicità nelle nozioni matematiche come sono considerate comunemente nella nostra epoca.

Uno degli esempi più notevoli di tali nozioni illogiche, e che dovremo esaminare qui in primo luogo, benché non sia il solo che incontreremo nel corso della nostra esposizione, è il preteso infinito matematico o quantitativo, fonte di quasi tutte le difficoltà sollevate nei confronti del calcolo infinitesimale – o, forse più esattamente, del metodo infinitesimale, essendovi in ciò qualcosa che, comunque la pensino i «convenzionalisti», oltrepassa la portata di un semplice «calcolo» nel senso ordinario del termine -; non vi sono eccezioni se non per le difficoltà derivanti da una concezione erronea o insufficiente della nozione di «limite», indispensabile per giustificare il rigore del metodo infinitesimale e fame altra cosa da un semplice metodo di approssimazione. D'altronde, come vedremo, occorre distinguere tra i casi in cui il cosiddetto infinito non esprime che una pura e semplice assurdità - ossia un'idea contraddittoria in sé, come quella del «numero infinito» -, ed i casi in cui è impiegato solamente in maniera abusiva nel senso di indefinito; non si dovrebbe però credere che la confusione tra infinito e indefinito si riduca per questo ad una semplice questione di parole, poiché riguarda in verità le idee stesse. È singolare come questa confusione, che sarebbe stato sufficiente dissipare per tagliar corto a tante discussioni, sia stata commessa dallo stesso Leibnitz, generalmente considerato l'inventore del calcolo infinitesimale, ma che noi

chiameremmo piuttosto il suo «formulatore», poiché questo metodo corrisponde a certe realtà che, in quanto tali, hanno un'esistenza indipendente da colui che le concepisce e le esprime più o meno perfettamente; le realtà di ordine matematico, al pari di tutte le altre, non possono che essere scoperte, non inventate, mentre invece - come accade fin troppo spesso in questo ambito – è proprio d'«invenzione» che si tratta, allorché ci si lascia condurre, tramite un «gioco» di notazione, nella pura fantasia; ma sarebbe sicuramente ben difficile far comprendere questa differenza a dei matematici i quali s'immaginano volentieri che tutta la loro scienza non sia e non debba essere altro che una «costruzione dello spirito umano», il che, se si dovesse dar loro credito, la ridurrebbe a ben poca cosa in verità! Comunque sia, Leibnitz non seppe mai spiegarsi chiaramente sui principi del suo calcolo, il che mostra come vi fosse in ciò qualcosa che lo oltrepassava e gli si imponeva in qualche modo senza che ne avesse coscienza; se egli se ne fosse reso conto, non avrebbe sicuramente ingaggiato al riguardo una disputa di «priorità» con Newton; del resto, dispute simili sono sempre del tutto vane, poiché le idee, nella misura in cui sono vere, non possono essere proprietà di nessuno, a dispetto dell'«individualismo» moderno, e non vi è che l'errore che possa essere attribuito propriamente agli individui umani. Non ci dilungheremo oltre su tale questione, che potrebbe condurci assai lontano dall'oggetto del nostro studio, per quanto non sia forse inutile, sotto certi aspetti, far comprendere come il ruolo dei cosiddetti «grandi uomini» sia spesso, in buona parte, un ruolo di «ricettori», benché essi stessi siano generalmente i primi ad illudersi circa la loro «originalità».

Per il momento, quel che ci riguarda più direttamente è questo: se dobbiamo constatare simili insufficienze in Leibnitz, insufficienze tanto più gravi in quanto vertono soprattutto sulle questioni di principio, che ne sarà degli altri filosofi e matematici moderni, ai quali è sicuramente molto superiore nonostante tutto? Tale superiorità gli deriva, da un lato, dallo studio delle dottrine scolastiche del medioevo, benché non le abbia sempre interamente comprese, e, dall'altro, da certi dati esoterici d'origine o d'ispirazione principalmente rosacrociana[4], dati evidentemente molto incompleti e anche frammentari, e che d'altronde gli accadde talvolta di applicare assai male, come vedremo da qualche esempio anche qui; è a queste due «fonti», per parlare come gli storici, che conviene riferire in definitiva pressoché tutto ciò che di realmente valido presentano le sue

---

[4] Il marchio innegabile di tale origine si trova nella figura ermetica posta da Leibnitz all'inizio del suo trattato *De Arte combinatoria:* è una rappresentazione della *Rota Mundi* nella quale, al centro della doppia croce degli elementi (fuoco e acqua, aia e terra) e delle qualità (caldo e freddo, secco e umido), la *quinta essentia* è simboleggiata da una rosa a cinque petali (corrispondenti all'etere considerato in sé e come principio degli altri quattro elementi); naturalmente questa «firma» è passata completamente inosservata a tutti i commentatori universitari!

teorie, e che gli permise di reagire, sia pure imperfettamente, contro il cartesianesimo, il quale rappresentava allora, nel duplice dominio filosofico e scientifico, l'insieme delle tendenze e delle concezioni più specificamente moderne. Tale osservazione è sufficiente insomma a spiegare, in poche parole, tutto quel che fu Leibnitz, e, se lo si vuole comprendere, non si dovrebbero mai perdere di vista queste indicazioni generali, che, per tale ragione, abbiamo ritenuto opportuno formulare sin dall'inizio; ma è ora di abbandonare queste considerazioni preliminari per addentrarci nell'esame delle questioni che ci permetteranno di determinare il vero significato del calcolo infinitesimale.

I - Infinito e indefinito

Procedendo in qualche modo in senso inverso rispetto alla scienza profana, dobbiamo - secondo il punto di vista costante di ogni scienza tradizionale - porre innanzitutto il principio che ci permetterà in seguito di risolvere, in maniera pressoché immediata, le difficoltà cui ha dato luogo il metodo infinitesimale, senza perderci in discussioni che rischierebbero altrimenti di essere interminabili, come lo sono in effetti per i filosofi ed i matematici moderni, i quali, mancando di questo principio, non sono mai riusciti ad apportare a tali difficoltà una soluzione soddisfacente e definitiva. Il principio in questione è l'idea dell'Infinito inteso nel suo solo vero significato, ossia il significato puramente metafisico; in proposito non dobbiamo d'altronde che richiamare sommariamente quanto abbiamo già esposto in modo più completo altrove[1]: l'Infinito è propriamente ciò che non ha limiti, poiché finito è evidentemente sinonimo di limitato; non si può dunque, se non abusivamente, applicare tale termine ad altro che a ciò che non ha assolutamente alcun limite, vale a dire al Tutto universale, il quale include in sé tutte le possibilità, e, pertanto, non può essere limitato da alcunché; così inteso l'Infinito è metafisicamente e logicamente necessario, poiché non solo non può implicare alcuna contraddizione, non racchiudendo in sé nulla di negativo, ma è al contrario la sua negazione che sarebbe contraddittoria. Inoltre, non può evidentemente esservi che un Infinito, poiché due infiniti supposti distinti si limiterebbero a vicenda, dunque si escluderebbero forzatamente; di conseguenza, ogni qual volta il termine «infinito» sia impiegato in un senso diverso da quello che abbiamo appena indicato, potremo essere certi *a priori* che tale impiego è necessariamente abusivo, poiché comporta, in definitiva, o l'ignorare in modo puro e semplice l'infinito metafisico, o il supporre accanto ad esso un altro infinito.

È vero che gli scolastici ammettevano quel che chiamavano un *infinitum secundum quid* da essi accuratamente distinto dall'*infinitum absolutum*, il solo infinito metafisico; ma possiamo vedere in ciò un'imperfezione della loro terminologia, poiché, se tale distinzione consentiva loro di sfuggire alla contraddizione di una pluralità di infiniti intesi in senso proprio, è non meno certo che il duplice impiego del termine *infinitum* rischiava di causare molteplici confusioni; d'altronde, dei due

[1] *Les États multiples de l'être*, Éditions Véga Paris, 1931, cap. I; [trad. it.: *Gli stati molteplici dell'essere*, Adelphi, Milano, 1996].

significati che in tal maniera ad esso attribuivano, uno era del tutto improprio, perché affermare che qualcosa è infinito soltanto sotto un certo aspetto - significato esatto dell'espressione *infinitum secundum quid* - significa in realtà che non è affatto infinito[2]. Infatti, non perché una cosa non è limitata in un certo senso o sotto un certo aspetto è legittimo concluderne che non sia in alcun modo limitata, come sarebbe invece necessario affinché fosse veramente infinita; non solo può essere al contempo limitata sotto altri aspetti, ma possiamo affermare che lo è necessariamente, per il fatto di essere una certa cosa determinata, e, a causa della sua stessa determinazione, di non includere tutte le possibilità, il che significa che è limitata da ciò che lascia al di fuori di essa; se al contrario il Tutto universale è infinito, è proprio perché non lascia alcunché al di fuori di esso[3]. Ogni determinazione, per quanto generale la si supponga e qualunque estensione possa ricevere, esclude dunque necessariamente la vera nozione di infinito[4]; una determinazione qualsiasi è sempre una limitazione, avendo come caratteristica essenziale quella di definire un certo dominio di possibilità in rapporto a tutto il resto, escludendo per ciò stesso il resto. Così, è veramente un nonsenso applicare l'idea di infinito a qualsivoglia determinazione - ad esempio, nel caso che dobbiamo qui esaminare più in particolare, alla quantità o all'uno o all'altro dei suoi modi; l'idea di un «infinito determinato» è troppo manifestamente contraddittoria perché sia il caso di insistervi, sebbene tale contraddizione sia il più delle volte sfuggita al pensiero profano dei moderni, e persino coloro che si potrebbero chiamare «semi-profani» come Leibnitz non abbiano saputo coglierla chiaramente[5]. Per evidenziare ancor meglio tale contraddizione potremmo dire, in termini tutto sommato equivalenti, che è evidentemente assurdo voler definire l'Infinito: una definizione, infatti, non è altro che l'espressione di una determinazione, e le parole stesse dicono assai chiaramente che quanto è suscettibile di definizione non può che essere finito o limitato; tentare di far entrare l'Infinito in una formula, o, se si preferisce, rivestirlo di una forma qualsiasi, significa, consapevolmente o

---

[2] In un senso assai vicino a questo Spinoza impiegherà più tardi l'espressione «infinito nel suo genere», che dà luogo naturalmente alle stesse obiezioni.

[3] Si può anche dire che lascia al di fuori di esso solo l'impossibilità, la quale, essendo un puro nulla, non può limitarlo in alcun modo.

[4] Ciò è ugualmente vero per le determinazioni di ordine universale - e non più semplicemente generale -, compreso l'Essere stesso che è la prima di tutte le determinazioni; va da sé tuttavia che tale considerazione non deve intervenire nelle applicazioni unicamente cosmologiche con cui abbiamo a che fare nel presente studio.

[5] Se ci si stupisse dell'espressione «semi-profani» che impieghiamo qui, diremmo che essa può giustificarsi, in maniera molto precisa, mediante la distinzione tra l'iniziazione effettiva e l'iniziazione semplicemente virtuale, sulla quale dovremo spiegarci in un'altra occasione. [Si veda in proposito René Guénon, *Considerazioni sull'iniziazione,* Luni, Milano, 1996, cap. XXX. N.d.T.].

inconsapevolmente, sforzarsi di far entrare il Tutto universale in uno degli elementi infimi in esso compresi, il che costituisce sicuramente la più manifesta delle impossibilità.

Quel che abbiamo detto è sufficiente per stabilire, senza lasciar spazio al minimo dubbio e senza che occorra addentrarsi in altre considerazioni, che non può esservi infinito matematico o quantitativo, che tale espressione non ha anzi alcun senso, poiché la quantità stessa è una determinazione; il numero, lo spazio, il tempo, ai quali si vuole applicare la nozione di questo preteso infinito, sono condizioni determinate, e, come tali, non possono che essere finite; si tratta di certe possibilità, o di certi insiemi di possibilità, accanto e al di fuori delle quali ne esistono altre, il che implica evidentemente la loro limitazione. In questo caso vi è però qualcosa di più: concepire l'Infinito quantitativamente non significa soltanto limitarlo, ma concepirlo altresì come suscettibile di aumento o diminuzione, il che non è meno assurdo; con simili considerazioni si giunge rapidamente a immaginare non solo più infiniti che coesistono senza confondersi né escludersi, ma anche infiniti maggiori o minori di altri, e persino, essendo divenuto in tali condizioni l'infinito così relativo da non bastare più, si inventa il «transfinito», ossia il dominio delle quantità maggiori di infinito; è propriamente d'«invenzione» che si tratta allora, simili concezioni non potendo corrispondere ad alcunché di reale: tante parole, altrettante assurdità, anche riguardo alla semplice logica elementare, la qual cosa non impedisce che, tra quanti se ne fanno sostenitori, vi siano pretesi «specialisti» di logica, talmente grande è la confusione intellettuale nella nostra epoca!

Facciamo notare che abbiamo appena detto non solo «concepire un infinito quantitativo», ma anche «concepire l'infinito quantitativamente», e ciò richiede qualche spiegazione: abbiamo voluto, con questo, alludere più in particolare a coloro i quali, nel gergo filosofico contemporaneo, sono chiamati «infinitisti»; tutte le discussioni tra «finitisti» ed «infinitisti», in effetti, mostrano chiaramente come tanto gli uni quanto gli altri abbiano per lo meno in comune l'idea, totalmente falsa, che l'Infinito metafisico sia solidale con l'infinito matematico, quando non vi si identifichi in modo puro e semplice[6]. Tutti costoro dunque ignorano parimenti i principi più elementari della metafisica, poiché al contrario è la concezione stessa del vero infinito metafisico - ed essa sola - che consente di respingere in maniera assoluta ogni «infinito particolare», se è permesso esprimersi in questo modo, quale il preteso infinito quantitativo, e di essere inoltre certi in anticipo che, ovunque lo si incontrerà, non potrà trattarsi che di un'illusione,

---

[6] Citeremo solamente, come esempio caratteristico, il caso di L. Coutourat il quale, concludendo la sua tesi *De l'infini mathématique,* in cui si è sforzato di provare l'esistenza di un infinito in numero e in grandezza, dichiarava che era stata sua intenzione mostrare con ciò che, «nonostante il neo-criticismo (ossia le teorie di Renouvier e della sua scuola), una metafisica infinitista è probabile»!

circa la quale ci sarà soltanto da chiedersi cosa abbia potuto generarla, onde potervi sostituire una nozione più conforme alla verità. Insomma, ogni qual volta si tratti di una cosa particolare, di una possibilità determinata, saremo proprio per questo certi *a priori* che essa è limitata, e, possiamo dire, limitata dalla sua stessa natura, e ciò resta ugualmente vero nel caso in cui, per una ragione qualsiasi, non possiamo attualmente raggiungerne i limiti; ma è proprio l'impossibilità di raggiungere i limiti di certe cose, e talvolta persino di concepirli chiaramente, a causare, almeno in coloro cui i principi metafisici fanno difetto, l'illusione che tali cose non abbiano limiti, e, ripetiamolo, è questa illusione, e null'altro, ad essere formulata nell'affermazione contraddittoria di un «infinito determinato».

È qui che interviene, per rettificare questa falsa nozione, o piuttosto per sostituirla con una concezione vera delle cose[7], l'idea di indefinito, ossia appunto l'idea di uno sviluppo di possibilità di cui non possiamo raggiungere attualmente i limiti; consideriamo pertanto fondamentale, in tutte le questioni in cui compare il preteso infinito matematico, la distinzione tra l'infinito e l'indefinito. Rispondeva senza dubbio a ciò, nell'intenzione dei suoi autori, la distinzione scolastica tra l'*infinitum absolutum* e l'*infinitum secundum quid*; ed è certamente increscioso che Leibnitz, che pure ha preso a prestito per altri versi molte cose dalla scolastica abbia trascurato o ignorato tale distinzione, poiché, per quanto imperfetta fosse la forma in cui era espressa, gli sarebbe potuta servire per rispondere assai facilmente ad alcune delle obiezioni sollevate contro il suo metodo. Per converso, sembra proprio che Cartesio abbia tentato di stabilire la distinzione di cui si tratta, tuttavia è ben lungi dall'averla espressa e persino concepita con sufficiente precisione, poiché, secondo lui, l'indefinito è ciò di cui non vediamo i limiti e che potrebbe in realtà essere infinito, benché non si possa affermare che lo sia, mentre la verità è che possiamo affermare, al contrario, che non lo è affatto, non essendo per nulla necessario vederne i limiti per essere certi che esistano; si vede dunque come tutto ciò sia vago e confuso, e sempre a causa dello stesso difetto di principio. Cartesio dice infatti: «E quanto a noi, vedendo cose nelle quali, secondo certi sensi[8], non rileviamo affatto limiti, non asseriremo per questo

---

[7] A rigor di logica, è il caso di distinguere tra «falsa nozione» (o, se si vuole, «pseudo-nozione») e «nozione falsa»: una «nozione falsa» non corrisponde adeguatamente alla realtà, benché vi corrisponda tuttavia in mia certa misura; una «falsa nozione» al contrario implica contraddizione, come nel caso presente, così da non essere davvero una nozione, sia pure falsa - benché ne abbia l'apparenza per coloro che non avvertono la contraddizione -, poiché, non esprimendo che l'impossibile, ossia la stessa cosa che il niente, non corrisponde assolutamente a nulla; una «nozione falsa» è suscettibile di rettificazione, ma una «falsa nozione» non può che essere respinta in modo puro e semplice.

[8] Queste parole sembrano proprio voler richiamare il *secundum quid* scolastico, così potrebbe darsi che l'intenzione principale della frase che citiamo sia stata quella di criticare indirettamente l'espressione *infinitum secundum quid*.

che siano infinite, ma le reputeremo solo indefinite»[9]. Ne fornisce come esempio l'estensione e la divisibilità dei corpi; non asserisce che tali cose siano infinite, tuttavia non sembra neppure volerlo negare formalmente, tanto più che ha appena dichiarato di non volere «ingarbugliarsi nelle dispute dell'infinito», maniera un po' troppo semplice per sbarazzarsi delle difficoltà, e benché dica poco oltre che «ancorché vi rilevassimo proprietà che ci sembrano non avere limiti, non disconosciamo che ciò procede dal difetto del nostro intendimento, e non già dalla loro natura»[10]. Egli vuole insomma, con giusta ragione, riservare il nome di infinito a ciò che non può avere alcun limite; da un lato sembra però non sapere, con la certezza assoluta che implica ogni conoscenza metafisica che ciò che non ha alcun limite non può essere altro che il Tutto universale, e, dall'altro, che la nozione stessa di indefinito va precisata molto più di quanto egli non faccia; se lo fosse stata, un gran numero di confusioni ulteriori non si sarebbe senza dubbio prodotto tanto facilmente[11].

Affermiamo che l'indefinito non può essere infinito, perché il suo concetto comporta sempre una certa determinazione, si tratti dell'estensione, della durata, della divisibilità o di qualsiasi altra possibilità; l'indefinito, in una parola, qualunque sia e sotto qualunque aspetto lo si consideri, è ancora finito e non può che essere finito. Senza dubbio i limiti ne sono retrocessi sino a trovarsi fuori dalla nostra portata, almeno finché tentassimo di raggiungerli in una maniera che potremmo chiamare «analitica», come spiegheremo più completamente in seguito; ma non sono affatto soppressi per questo, e, in ogni caso, se le limitazioni di un certo ordine possono essere soppresse, ne sussistono altre ancora, inerenti alla natura stessa di ciò che si considera, poiché è in virtù della propria natura, e non semplicemente di qualche circostanza più o meno esteriore ed accidentale, che ogni cosa particolare è finita, a qualunque grado possa essere spinta effettivamente l'estensione di cui è suscettibile. Si può notare in proposito che il segno ∞, col quale i matematici rappresentano il loro preteso infinito, è esso stesso una figura chiusa, dunque visibilmente finita, tanto quanto il cerchio di cui certuni hanno voluto fare un simbolo dell'eternità, mentre non può che essere una raffigurazione di un ciclo temporale, soltanto indefinito nel suo ordine, ossia di quella che è chiamata propriamente la perpetuità[12]; è facile

---

[9] *Principes de la Philosophie*, Paris, 1647, I, 26; [trad. it.: *I principi della filosofia,* Opere filosofiche, vol. 3, Laterza, Roma-Bari, 2000].

[10] *Ibid.*, I, 27.

[11] Così Varignon, nella sua corrispondenza con Leibnitz a proposito del calcolo infinitesimale, impiega indistintamente i termini «infinito» e «indefinito» come fossero pressoché sinonimi, o come se per lo meno fosse in qualche modo indifferente prendere l'uno per l'altro, quando al contrario la loro differenza di significato, in tutte queste discussioni, avrebbe dovuto essere ritenuta il punto essenziale.

[12] È opportuno far notare, come abbiamo spiegato altrove, che un tale ciclo non è mai davvero chiuso, ma sembra solamente esserlo finché ci si pone in una prospettiva che non

vedere come questa confusione tra l'eternità e la perpetuità, tanto comune tra gli Occidentali moderni, sia strettamente apparentata a quella tra l'infinito e l'indefinito.

Per far meglio comprendere l'idea dell'indefinito ed il modo in cui questo si forma a partire dal finito inteso nella sua accezione ordinaria, si può considerare un esempio quale la serie dei numeri: in essa non è mai possibile, evidentemente, arrestarsi ad un punto determinato, poiché dopo ogni numero ve n è sempre un altro, ottenuto aggiungendo ad esso l'unità; è necessario di conseguenza che la limitazione di questa serie indefinita sia di un altro ordine rispetto a quella applicabile ad un insieme definito di numeri, compreso tra due numeri determinati qualsiasi; è necessario cioè che riguardi non già proprietà particolari di certi numeri, bensì la natura stessa del numero in tutta la sua generalità, ossia la determinazione che, costituendo essenzialmente tale natura, fa sì al contempo che il numero sia ciò che è e non qualsiasi altra cosa. Si potrebbe ripetere esattamente la medesima osservazione se si trattasse non più del numero, ma dello spazio o del tempo, considerati parimenti in tutta l'estensione di cui sono suscettibili[13]; tale estensione, per quanto indefinita la si concepisca e lo sia effettivamente, non potrà mai in alcun modo farci uscire dal finito. Il fatto è che, mentre il finito presuppone necessariamente l'infinito - poiché quest'ultimo comprende e avviluppa tutte le possibilità -, l'indefinito procede al contrario dal finito, di cui non è in realtà che uno sviluppo ed al quale è di conseguenza sempre riducibile, essendo evidente che non si può trarre dal finito, mediante qualsivoglia procedimento, né altro né più di ciò che vi era già contenuto potenzialmente. Per riprendere l'esempio della serie dei numeri, possiamo dire che tale serie, con tutta l'indefinitezza che comporta, ci è data tramite la sua legge di formazione, dalla quale risulta immediatamente la sua indefinitezza; ora, questa legge consiste in ciò: dato un numero qualsiasi, si formerà il successivo aggiungendo ad esso l'unità. La serie dei numeri si forma quindi per addizioni successive dell'unità indefinitamente ripetuta a se stessa, il che in fondo costituisce l'estensione indefinita del procedimento di formazione di una somma aritmetica qualsiasi; e si vede qui molto chiaramente come l'indefinito si formi a partire dal finito. Tale esempio deve d'altronde la sua particolare chiarezza al carattere discontinuo della quantità numerica; ma, per considerare le cose in maniera più generale e applicabile a tutti i casi, sarebbe sufficiente

---

permetta di cogliere la reale distanza esistente tra le sue estremità, così come una spira d'elica ad asse verticale sembra un cerchio quando sia proiettata su un piano orizzontale.

[13] Non servirebbe quindi a nulla affermare che lo spazio, ad esempio, non possa essere limitato se non da qualcosa che sia ancora spazio cosicché lo spazio in generale non possa più essere limitato da alcunché; al contrario, esso è limitato dalla determinazione che costituisce la sua natura in quanto spazio e che lascia posto, al di fuori di esso, a tutte le possibilità non spaziali.

insistere al riguardo sull'idea di «divenire» implicita nel termine «indefinito», e che abbiamo espresso poc'anzi parlando di sviluppo di possibilità, sviluppo che in sé e in tutto il suo corso comporta sempre qualcosa di incompiuto[14]; l'importanza della considerazione delle «variabili», per quanto concerne il calcolo infinitesimale, conferirà a quest'ultimo punto tutto il suo significato.

---

[14] Cfr. la nota di A.K. Coomaraswamy sul concetto platonico di «misura» [tr. it.: *Chiose sulla* Katha Upanishad, in «Rivista di Studi Tradizionali» n. 77, pp. 290-292, nota 29], che abbiamo citato altrove (*Le .Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. III): il «non-misurato» è ciò che ancora non è stato definito, cioè insomma l'indefinito, ed è, al tempo stesso e per ciò stesso, ciò che è solo incompletamente realizzato nella manifestazione.

II - La contraddizione del «numero infinito»

Vi sono casi in cui è sufficiente, come vedremo meglio in seguito, sostituire l'idea del preteso infinito con quella di indefinito per eliminare immediatamente ogni difficoltà; ve ne sono altri, invece, in cui ciò non è possibile, poiché si ha a che fare con qualcosa di nettamente determinato, di «concluso» in qualche modo per ipotesi, e che come tale, secondo la nostra ultima osservazione, non può dirsi indefinito: così, ad esempio, se si può dire che la serie dei numeri è indefinita, non si può dire che un certo numero sia indefinito, per quanto grande lo si supponga e qualunque posto occupi in tale serie. L'idea del «numero infinito», inteso come il «più grande di tutti i numeri» o il «numero di tutti i numeri», o ancora il «numero di tutte le unità», è un'idea veramente contraddittoria in sé, la cui impossibilità sussisterebbe anche qualora si rinunciasse all'impiego ingiustificabile del termine «infinito»: non può esistere un numero più grande di tutti gli altri, poiché, per quanto grande sia, se ne può sempre formare uno ancora più grande aggiungendo ad esso l'unità, conformemente alla legge di formazione da noi enunciata sopra. Ciò significa che la serie dei numeri non può avere un ultimo termine, e, proprio perché non «terminata», essa è veramente indefinita; siccome il numero di tutti i suoi termini non potrebbe che essere l'ultimo tra essi, si può anche dire che tale serie non è «numerabile», idea sulla quale dovremo tornare più ampiamente in seguito.

L'impossibilità del «numero infinito» può essere stabilita anche con diversi altri argomenti; Leibnitz, che almeno la riconosceva molto chiaramente[1], impiegava quello consistente nel raffrontare la serie dei numeri pari con quella di tutti i numeri interi: a ciascun numero ne corrisponde un altro uguale al suo doppio, cosicché si possono far corrispondere le due serie a termine a termine, da cui risulta che il numero dei termini dev'essere il medesimo nell'una come nell'altra serie; d'altra parte, i numeri interi sono evidentemente due volte i numeri pari, questi ultimi collocandosi di due in due nella serie dei numeri interi; si giunge dunque in tal modo ad una manifesta contraddizione. Si può generalizzare questo argomento considerando, anziché la serie dei numeri pari, ossia dei multipli di due, quella dei multipli di un numero qualsiasi, ed il

[1] «A dispetto del mio calcolo infinitesimale - scriveva in particolare - non ammetto un vero numero infinito, sebbene confessi che la moltitudine delle cose oltrepassi ogni numero finito, o piuttosto ogni numero».

ragionamento è identico; si può, ancora, considerare allo stesso modo la serie dei quadrati dei numeri interi[2], o, più in generale, quella delle loro potenze di esponente qualsiasi. In ogni caso, la conclusione cui si giunge è sempre la stessa: una serie comprendente solo una parte dei numeri interi dovrebbe avere un numero di termini uguale a quella che li comprende tutti, il che significa che il tutto non sarebbe più grande della sua parte; e, giacché si ammette che vi sia un numero di tutti i numeri, è impossibile sfuggire a questa contraddizione. Eppure certuni hanno creduto di potervi sfuggire, ammettendo al contempo che vi siano numeri a partire dai quali la moltiplicazione per un certo numero o l'elevazione ad una certa potenza non sarebbe più possibile, perché darebbe luogo ad un risultato che oltrepasserebbe il preteso «numero infinito»; in effetti, vi è persino chi è giunto a immaginare numeri «maggiori di infinito», da cui teorie come quella del «transfinito» di Cantor, che possono essere molto ingegnose, ma che per questo non sono logicamente più valide[3]: è mai concepibile che si possa chiamare «infinito» un numero il quale, al contrario, è talmente «finito» da non essere neppure il più grande di tutti? D'altronde, secondo simili teorie, vi sarebbero numeri ai quali alcune regole del calcolo ordinario non si applicherebbero più, ossia, in definitiva, numeri che non sarebbero veramente tali, chiamati così solo per convenzione[4]; è quanto accade necessariamente allorché, cercando di concepire il «numero infinito» altrimenti che come il più grande dei numeri, si considerano diversi «numeri infiniti» supposti disuguali tra loro, cui si attribuiscono proprietà non aventi più nulla in comune con quelle dei numeri ordinari; si sfugge così ad una contraddizione solo per cadere in un'altra, e, in fondo, tutto ciò non è che il prodotto del «convenzionalismo» più privo di senso che si possa immaginare.

Così, l'idea del preteso «numero infinito», in qualunque maniera si presenti e con qualunque nome la si voglia designare, contiene sempre elementi contraddittori; del resto, non si ha alcun bisogno di questa supposizione assurda qualora ci si formi una giusta concezione di cosa sia realmente l'indefinitezza del numero, e si riconosca inoltre che esso,

---

[2] Come faceva Cauchy, il quale attribuiva del resto tale argomento a Galileo *(Sept leçons de Physique générale*, 3ª lezione).

[3] Già all'epoca di Leibnitz, Wallis considerava «*spatia plus quam infinita*»; questa opinione, denunciata da Varignon come implicante contraddizione, fu parimenti sostenuta da Guido Grandi nel suo libro *De infinitis infinitorum*. D'altra parte Jean Bernoulli, nel corso delle sue discussioni con Leibnitz, scriveva: «*Si dantur termini infiniti, dabitur etiam terminus infinitesimus (non dico utimus) et qui eum sequuntur*», il che, sebbene egli non si sia spiegato più chiaramente in proposito sembri indicare che egli ammettesse che vi potessero essere in una serie numerica termini «al di là dell'infinito».

[4] Non si può in alcun modo affermare che si tratti qui di un impiego analogico dell'idea di numero, poiché ciò presupporrebbe una trasposizione in un dominio altro da quello della quantità, mentre al contrario è proprio alla quantità, intesa nel suo senso più letterale, che tutte le considerazioni di questo tipo si riferiscono sempre ed esclusivamente.

nonostante la sua indefinitezza, non è affatto applicabile a tutto ciò che esiste. Non insistiamo su quest'ultimo punto, avendolo già sufficientemente spiegato altrove: il numero non è che un modo della quantità, e la quantità stessa è solo una categoria o un modo speciale dell'essere, non coestensivo a quest'ultimo, o, più precisamente ancora, essa è solo una condizione propria ad un determinato stato di esistenza nell'insieme dell'esistenza universale: ma è appunto questo che i più tra i moderni faticano a comprendere, abituati come sono a voler tutto ridurre alla quantità ed a valutare tutto numericamente[5]. Tuttavia, nel dominio stesso della quantità, vi sono cose che sfuggono al numero, come vedremo a proposito del continuo; e, persino senza uscire dall'ambito della quantità discontinua, si è già costretti ad ammettere, almeno implicitamente, che il numero non è applicabile a tutto qualora si riconosca che la moltitudine di tutti i numeri non può costituire un numero, il che del resto non è insomma che un'applicazione della verità incontestabile secondo cui ciò che limita un certo ordine di possibilità è necessariamente al di fuori ed al di là di esso[6]. Sennonché, dev'essere ben chiaro che una simile moltitudine - considerata sia nel discontinuo, come nel caso della serie dei numeri, sia nel continuo, sul quale dovremo tornare più avanti - non può dirsi affatto infinita, non trattandosi d'altro che di indefinito; è questa nozione di moltitudine che ci accingiamo ora ad esaminare più da vicino.

[5] Così Renouvier pensava che il numero è applicabile a tutto, almeno idealmente ossia che tutto sia «numerabile» in sé, quand'anche fossimo incapaci di «numerarlo» effettivamente; si è pure completamente confuso sul senso che Leibnitz attribuisce alla nozione di «moltitudine», non ha mai potuto comprendere come la distinzione tra questa ed il numero permetta di sfuggire alla contraddizione del «numero infinito».

[6] Abbiamo detto tuttavia che una cosa particolare o determinata, quale che sia, è limitata per sua stessa natura, ma in ciò non vi è assolutamente contraddizione: è per il lato negativo di tale natura, infatti, che è limitata (poiché, come ha detto Spinoza, «*omnis determinatio negatio est*»), ossia in quanto esclude le altre cose e le lascia al di fuori di essa, cosicché, in definitiva, è proprio la coesistenza di queste altre cose a limitare la cosa in questione; d'altronde è per questo che il Tutto universale, ed esso solo, non può essere limitato da alcunché.

III - La moltitudine innumerabile

Leibnitz, come abbiamo visto, non ammette in alcun modo il «numero infinito», poiché al contrario dichiara espressamente che quest'ultimo, comunque lo si voglia intendere, implica contraddizione; ammette invece quella che chiama una «moltitudine infinita», senza però precisare, come per lo meno avrebbero fatto gli scolastici, che può trattarsi in ogni caso solo di un *infinitum secundum quid*; e la serie dei numeri è per lui un esempio di una simile moltitudine. Tuttavia, per un altro verso, nel dominio quantitativo, e persino in ciò che concerne le grandezze continue, l'idea di infinito gli sembrava sempre sospetta di contraddizione almeno possibile, poiché, lungi dall'essere un'idea adeguata, comporta inevitabilmente una certa dose di confusione, e possiamo essere certi che un'idea non implichi alcuna contraddizione solo quando ne concepiamo distintamente tutti gli elementi[1]; ciò permette di accordare a tale idea solo un carattere «simbolico», diremmo piuttosto «rappresentativo», e per questo, come vedremo più avanti, non ha mai osato pronunciarsi nettamente sulla realtà degli «infinitamente piccoli»; sennonché, tale imbarazzo e tale atteggiamento dubitativo evidenziano ancor più il difetto di principio che gli faceva ammettere che si possa parlare di una «moltitudine infinita». Ci si potrebbe anche chiedere, in base a ciò, se non pensasse che una simile moltitudine, per essere «infinita» come egli dice, dovesse non solo non essere «numerabile», cosa evidente, ma anche niente affatto quantitativa, considerando la quantità in tutta la sua estensione ed in tutti i suoi modi; ciò potrebbe essere vero in certi casi, ma non in tutti; comunque sia, è un altro punto sul quale non si è mai spiegato chiaramente.

L'idea di una moltitudine che oltrepassa ogni numero, e che di conseguenza non è un numero, sembra aver stupito la maggior parte di

---

[1] Cartesio parlava solamente di idee «chiare e distinte» Leibnitz precisa che un'idea può essere chiara senza essere distinta, nel senso che permette soltanto di riconoscere il suo oggetto e di distinguerlo da tutte le altre cose, mentre un'idea distinta è quella non solo «distintiva» in questo senso, ma anche «distinta» nei suoi elementi; un'idea può essere d'altronde più o meno distinta, e l'idea adeguata lo è completamente in tutti i suoi elementi, ma, mentre Cartesio credeva che si potessero avere idee «chiare e distinte» di ogni cosa, Leibnitz ritiene al contrario che solo le idee matematiche possano essere adeguate, essendo i loro elementi in qualche modo in numero definito, mentre tutte le altre idee racchiudono una moltitudine di elementi la cui analisi non può mai essere completata, cosicché rimangono sempre parzialmente confuse.

coloro che hanno discusso le concezioni di Leibnitz, fossero d'altronde «finitisti» o «infinitisti»; eppure essa è ben lungi dall'appartenere in proprio a Leibnitz, come costoro sembrano aver generalmente creduto, essendo anche questa, al contrario, un'idea del tutto corrente presso gli scolastici[2]. Tale idea si riferiva propriamente a tutto ciò che non è né numero né «numerabile» - ossia a tutto ciò che non riguarda la quantità discontinua -, che si tratti di cose appartenenti ad altri modi della quantità o interamente al di fuori del dominio quantitativo, essendo un'idea concernente l'ordine dei «trascendentali», cioè modi generali dell'essere che, contrariamente ai suoi modi speciali come la quantità, sono ad esso coestensivi[3]. È quel che permette di parlare, ad esempio, della moltitudine degli attributi divini, o della moltitudine degli angeli, ossia di esseri appartenenti a stati non sottomessi alla quantità, ove, di conseguenza, non può essere questione di numero; è anche quel che ci permette di considerare gli stati dell'essere o i gradi dell'esistenza in molteplicità o in moltitudine indefinita, mentre la quantità è una condizione speciale di uno solo tra essi. D'altra parte, essendo l'idea di moltitudine, contrariamente a quella di numero, applicabile a tutto ciò che esiste, devono esservi necessariamente moltitudini di ordine quantitativo, segnatamente in ciò che concerne la quantità continua, e per questo dicevamo poc'anzi che non sarebbe vero in tutti i casi considerare la cosiddetta «moltitudine infinita» - quella cioè che oltrepassa ogni numero – come interamente svincolata dal dominio della quantità. Non solo, il numero stesso può essere visto anche come una specie di moltitudine, ma a condizione di aggiungere che si tratta, secondo l'espressione di san Tommaso d'Aquino, di una «moltitudine misurata dall'unità»; ogni altra specie di moltitudine, non essendo «numerabile», è «non-misurata», ossia non affatto infinita, ma propriamente indefinita.

Va osservato a questo proposito un fatto piuttosto singolare: per Leibnitz tale moltitudine, che non costituisce un numero, è tuttavia un «risultato delle unità»[4]; cosa si deve intendere con ciò, e di quali unità può trattarsi? Il termine unità può essere assunto in due significati del tutto differenti: da un lato vi è l'unità aritmetica o quantitativa, elemento primo e

---

[2] Citeremo soltanto un testo tra molti altri, particolarmente chiaro al riguardo: «*Qui diceret aliquam multitudinem esse infinitam, non diceret eam esse numerum, vel numerum habere; addit etiam numerus super multitudinem rationem mensurationis. Est enim, numerus multitudo mensurata per unum,… et propter hoc numerus ponitur species quantitatis discretae, non autem multitudo, sed est de trascendentibus*» (S Tommaso d'Aquino, *In Phys.*, III, 1. 8).

[3] Si sa che gli scolastici, anche nella parte propriamente metafisica delle loro dottrine, non sono mai andati oltre la considerazione dell'Essere, cosicché, in realtà, la metafisica si riduce per essi alla sola ontologia.

[4] *Sistème nouveau de la nature et de la communication des substances*, in «Journal des Sçavans», Paris, 1695; [trad. it.: «Nuovo sistema della natura e della comunicazione tra le sostanze, nonché dell'unione che si ha tra anima e corpo», *Scritti filosofici*, vol. I, UTET, Torino, 2000].

punto di partenza del numero, e, dall'altro, quella designata analogicamente come l'Unità metafisica, la quale si identifica all'Essere puro stesso; non vediamo altre accezioni possibili oltre a queste; d'altronde, quando si parla delle «unità» impiegando questo termine al plurale, può evidentemente trattarsi soltanto del significato quantitativo.

Ma, se è così, la somma delle unità non può costituire altro che un numero, e non può in alcun modo oltrepassarlo; è vero che Leibnitz dice «risultato» e non «somma», ma questa distinzione, anche se voluta, lascia nondimeno sussistere un'incresciosa oscurità. Egli dichiara peraltro che la moltitudine, pur non essendo un numero, è tuttavia concepita per analogia col numero: «Quando vi sono più cose – egli dice – che non possono essere comprese da alcun numero, ciononostante attribuiamo ad esse analogicamente un numero, che chiamiamo infinito», benché non sia che un «modo di dire», un «*modus loquendi*»[5], ed anzi, in questa forma, un modo di dire fortemente scorretto, poiché in realtà non si tratta affatto di un numero; ma, quali che siano le imperfezioni d'espressione e le conclusioni cui possono dar luogo, dobbiamo ammettere in ogni caso che un'identificazione della moltitudine col numero non era sicuramente al fondo del suo pensiero.

Un altro punto al quale Leibnitz sembra attribuire una grande importanza è quello secondo cui l'«infinito», come egli lo concepisce, non costituisce un tutto[6]; quest'ultima è una condizione che reputa necessaria affinché quest'idea sfugga a contraddizione, ma è un altro punto che non manca di essere piuttosto oscuro. È il caso di chiedersi di che genere sia il «tutto» in questione, e occorre subito scartare interamente l'idea del Tutto universale, il quale, al contrario, come abbiamo detto sin dall'inizio, è l'Infinito metafisico stesso, ossia il solo vero Infinito, che non può essere minimamente in causa; infatti, si tratti del continuo o del discontinuo, la «moltitudine infinita» considerata da Leibnitz riguarda in ogni caso un dominio ristretto e contingente, di ordine cosmologico e non metafisico. D'altronde, si tratta evidentemente di un tutto concepito come composto di parti, mentre il Tutto universale, come abbiamo spiegato altrove[7], è propriamente «senza parti» in ragione appunto della sua infinità, poiché, dovendo queste parti essere necessariamente relative e finite, non potrebbero avere con esso alcun rapporto reale, il che significa che non esistono per esso. Dobbiamo dunque limitarci, circa l'interrogativo da noi

---

[5] *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitate nihilo minores, et de veru sensu Methodi infinitesimalis*, in «Acta Eruditotum», Leipzig, 1712.

[6] Cfr. specialmente *ibid.*: «*Infinitum continuum vel discretum proprie nec unum, nec totum, nec quantum est*», ove l'espressione «*nec quantum*» sembra proprio voler dire che per lui, come indicavamo sopra, la «moltitudine infinita» non deve essere concepita quantitativamente, a meno che per *quantum* non abbia qui inteso soltanto una quantità definita, come lo sarebbe stato il preteso «numero infinito» di cui ha dimostrato la contraddizione.

[7] Su questo punto si veda di nuovo *Les États multiples de l'être*, cit., cap. I.

posto, a considerare un tutto particolare; anche qui però, e precisamente per quanto concerne il modo di composizione di un simile tutto e la sua relazione con le sue parti, vi sono due casi da esaminare, corrispondenti a due accezioni molto differenti del termine «tutto». Intanto, se si tratta di un tutto che non sia altro e più che la semplice somma delle sue parti, di cui è composto al modo di una somma aritmetica, quel che Leibnitz dice è in fondo evidente, poiché tale modo di formazione è precisamente quello proprio al numero e non ci permette di oltrepassarlo; ma questa nozione, a dire il vero, lungi dal rappresentare la sola maniera in cui un tutto possa essere concepito, non è neppure quella di un vero tutto nel senso più rigoroso del termine. Infatti, un tutto che sia soltanto la somma o il risultato delle sue parti – e che di conseguenza sia logicamente posteriore ad esse – non è altro, in quanto tutto, che un *ens rationis*, essendo «uno» e «tutto» nella misura in cui lo concepiamo come tale; a parlare propriamente, in sé non è che una «collezione», e siamo noi a conferire ad esso in un senso relativo, per il modo in cui lo consideriamo, le caratteristiche di unità e di totalità. Un vero tutto, al contrario, possedendo tali caratteristiche per sua stessa natura, dev'essere logicamente anteriore alle sue parti ed esserne indipendente: è il caso di un insieme continuo, che possiamo dividere in parti arbitrarie, vale a dire di qualunque grandezza, ma che non presuppone affatto l'esistenza attuale di queste parti; siamo noi ad attribuire alle parti come tali una realtà, tramite una divisione ideale o effettiva, cosicché questo caso è esattamente l'inverso del precedente.

Ora, tutta la questione consiste insomma nel sapere se, quando Leibnitz dice che «l'infinito non è un tutto», egli escluda tanto il primo quanto il secondo significato; così sembra, ed anzi è probabile che lo sia, essendo quest'ultimo il solo caso in cui un tutto è veramente «uno», mentre l'infinito, secondo lui, non è «*nec unum, nec totum*». Un'ulteriore conferma è data dal fatto che questo caso, e non il primo, si applica ad un essere vivente o ad un organismo quando lo si consideri dal punto di vista della totalità; ora, Leibnitz dice: «Anche l'Universo non è un tutto, e non deve essere concepito come un animale la cui anima è Dio, come facevano gli antichi»[8]. Tuttavia, se è così, non si vede bene come le idee dell'infinito e del continuo possano risultare connesse – come lo sono per lui il più delle volte –, poiché l'idea del continuo si ricollega, almeno in un certo senso, proprio a questa seconda concezione della totalità; ma quest'ultimo punto potrà essere meglio compreso in seguito. È certo, in ogni caso, che se Leibnitz avesse concepito il terzo significato del termine «tutto», significato

[8] Lettera a Jean Bernoulli. – Leibnitz attribuisce qui assai gratuitamente agli antichi in generale un'opinione che, in realtà, è appartenuta soltanto a qualcuno di essi; egli ha chiaramente in vista la teoria degli Stoici, i quali concepivano Dio come unicamente immanente e lo identificavano all'*Anima Mundi*. D'altronde, va da sé che qui si tratta solo dell'Universo manifestato, ossia del «cosmo», e non del Tutto universale che comprende tutte le possibilità, tanto non-manifestate quanto manifestate.

puramente metafisico e superiore agli altri due, ossia l'idea del Tutto universale quale è stata da noi posta in primo luogo, non avrebbe potuto affermare che l'idea di infinito esclude la totalità, poiché dichiara d'altra parte: «L'infinito reale è forse l'assoluto stesso, il quale non è composto di parti ma, avendo delle parti, le comprende in ragione eminente e come al grado di perfezione»[9]. Vi è qui almeno un «barlume», si potrebbe dire, perché stavolta, come per eccezione, assume il termine «infinito» nel suo vero significato, benché sia erroneo affermare che tale infinito «ha delle parti», comunque ciò si voglia intendere; è strano però che esprima ancora il suo pensiero in forma dubitativa ed imbarazzata, come se non si fosse soffermato attentamente sul significato di questa idea; e forse non lo ha mai fatto, in realtà, altrimenti non si spiegherebbe come abbia potuto così spesso sviarla dal significato che le è proprio, e come sia talvolta così difficile, quando parla di infinito, sapere se sia stata sua intenzione assumere questo termine «a rigore», seppure a torto, o se non vi abbia visto altro che un semplice «modo di dire».

---

[9] Lettera a Jean Bernoulli, 7giugno 1698.

IV - La misura del continuo

Parlando del numero abbiamo avuto sinora in vista esclusivamente il numero intero, e così doveva essere logicamente, dal momento che consideravamo la quantità numerica come propriamente discontinua: nella serie dei numeri interi vi è sempre, tra due termini consecutivi, un intervallo perfettamente definito, caratterizzato dalla differenza di un'unità tra questi due numeri, che, se ci si attiene alla considerazione dei numeri interi, non può essere ridotto in alcun modo. D'altronde, il numero intero è in realtà il solo vero numero, quel che si potrebbe chiamare il numero puro; e la serie dei numeri interi, partendo dall'unità, cresce indefinitamente senza mai giungere ad un ultimo termine, la cui supposizione, come abbiamo visto, è contraddittoria; va da sé che essa si sviluppa interamente in una sola direzione, cosicché la direzione opposta, ossia quella dell'indefinitamente decrescente, non può trovarvi la sua rappresentazione – benché vi sia da un altro punto di vista, come mostreremo più avanti, una certa correlazione ed una sorta di simmetria tra la considerazione delle quantità indefinitamente crescenti e quella delle quantità indefinitamente decrescenti –. Tuttavia non ci si è attenuti a ciò, e si è stati indotti a considerare specie diverse di numeri, altre rispetto ai numeri interi; si dice abitualmente che si tratti di estensioni o generalizzazioni dell'idea di numero, ed in un certo senso è vero; ma tali estensioni ne costituiscono al contempo anche delle alterazioni, ed è quanto i matematici moderni sembrano dimenticare troppo facilmente, poiché il loro «convenzionalismo» li porta a disconoscerne l'origine e la ragion d'essere. I numeri diversi dai numeri interi, infatti, si presentano sempre e innanzitutto come la raffigurazione del risultato di operazioni impossibili finché ci si attenga al punto di vista dell'aritmetica pura, essendo quest'ultima, a rigore, l'aritmetica dei numeri interi: così, ad esempio, un numero frazionario non è altro che la rappresentazione del risultato di una divisione non effettuabile in maniera esatta, cioè in realtà di una divisione che deve dirsi aritmeticamente impossibile, il che del resto si riconosce implicitamente dicendo, secondo l'ordinaria terminologia matematica, che uno dei due numeri considerati non è divisibile per l'altro. È il caso di far notare sin d'ora che la comune definizione dei numeri frazionari è assurda: le frazioni non possono affatto essere «parti dell'unità», come si usa dire, la vera unità aritmetica essendo necessariamente indivisibile e senza parti; da ciò d'altronde deriva la discontinuità essenziale del numero che si forma a partire da essa; ma vediamo da dove proviene tale assurdità.

In effetti, non si giunge arbitrariamente a considerare in tal modo il risultato delle operazioni di cui abbiamo appena parlato, anziché limitarsi a reputarle puramente e semplicemente impossibili; si tratta, in generale, di una conseguenza risultante dall'applicazione del numero, quantità discontinua, alla misura di grandezze appartenenti all'ordine della quantità continua, come ad esempio le grandezze spaziali. Tra questi modi della quantità vi è una differenza di natura tale per cui la corrispondenza tra l'una e l'altra non può stabilirsi alla perfezione; per porvi rimedio fino ad un certo punto, almeno nella misura del possibile, si cerca di ridurre in qualche modo gli intervalli del discontinuo costituito dalla serie dei numeri interi, introducendo tra i suoi termini altri numeri, in primo luogo i numeri frazionari, i quali non avrebbero alcun senso al di fuori di tale considerazione. È allora facile capire che l'assurdità da noi segnalata poc'anzi per quanto concerne la definizione delle frazioni, deriva semplicemente da una confusione tra l'unità aritmetica e quelle denominate «unità di misura», unità soltanto convenzionali, in realtà grandezze d'altro genere rispetto al numero, e segnatamente grandezze geometriche. L'unità di lunghezza, ad esempio, non è che una certa lunghezza scelta per ragioni estranee all'aritmetica ed alla quale si fa corrispondere il numero 1 per poter misurare in rapporto ad essa tutte le altre lunghezze; sennonché, proprio a causa della sua natura di grandezza continua, ogni lunghezza, per quanto rappresentata numericamente dall'unità, è nondimeno sempre ed indefinitamente divisibile; si potranno dunque, raffrontandola ad altre lunghezze che non ne costituiranno multipli esatti, considerare parti di tale unità di misura, le quali però non saranno affatto, per questo, parti dell'unità aritmetica; soltanto così si introduce in realtà la considerazione dei numeri frazionari, come rappresentazione di rapporti tra grandezze non esattamente divisibili le une per le altre. La misura di una grandezza, infatti, non è altro che l'espressione numerica del suo rapporto con un'altra grandezza della stessa specie assunta come unità di misura, cioè in fondo come termine di paragone; ed è per questo che il metodo ordinario di misura delle grandezze geometriche è fondato essenzialmente sulla divisione.

Bisogna dire d'altra parte che, nonostante ciò, sussiste sempre inevitabilmente qualcosa della natura discontinua del numero, tale da non permettere che si ottenga così un equivalente perfetto del continuo; si possono ridurre gli intervalli quanto si vuole, cioè insomma ridurli indefinitamente, rendendoli minori di qualsivoglia quantità data, ma non si giungerà mai a sopprimerli interamente. Per far meglio comprendere tale questione, prendiamo l'esempio più semplice di un continuo geometrico, ossia una linea retta: consideriamo una semiretta estendentesi indefinitamente in una certa direzione[1], e assumiamo di far corrispondere a

---

[1] Si vedrà in seguito, a proposito della rappresentazione geometrica dei numeri negativi, perché dobbiamo prendere qui in esame solo una semiretta; del resto, il fatto che la serie dei

ciascuno dei suoi punti il numero che esprime la distanza di tale punto dall'origine; questa sarà rappresentata dallo zero, essendo evidentemente nulla la distanza rispetto a se stessa; a partire dall'origine, i numeri interi corrisponderanno alle estremità successive di segmenti tutti uguali tra loro ed uguali all'unità di lunghezza; i punti compresi tra queste estremità non potranno che essere rappresentati da numeri frazionari, le loro distanze dall'origine non essendo multipli esatti dell'unità di lunghezza. Va da sé che a mano a mano che si assumeranno numeri frazionari il cui denominatore diverrà via via più grande, e la cui differenza diverrà dunque via via più piccola, gli intervalli tra i punti ai quali corrisponderanno questi numeri risulteranno ridotti della stessa proporzione; si possono così far decrescere gli intervalli indefinitamente, almeno in teoria, poiché i denominatori dei numeri frazionari possibili sono tutti i numeri interi, la cui serie cresce indefinitamente[2]. Diciamo in teoria perché, di fatto, essendo indefinita la moltitudine dei numeri frazionari, non si potrà mai giungere ad utilizzarla interamente; ma supponiamo comunque che si facciano corrispondere idealmente tutti i numeri frazionari possibili a dei punti sulla semiretta in questione: nonostante la diminuzione indefinita degli intervalli, su tale linea rimarrà ancora una moltitudine di punti ai quali non corrisponderà alcun numero. Ciò può sembrare singolare e persino paradossale a prima vista, eppure è facile rendersene conto, poiché un simile punto può essere ottenuto mediante una costruzione geometrica molto semplice: costruiamo il quadrato avente per lato il segmento di retta le cui estremità siano i punti zero e 1, e tracciamo, delle diagonali di questo quadrato, quella che parte dall'origine, e tracciamo quindi la circonferenza avente per centro l'origine e questa diagonale per raggio; il punto in cui la circonferenza taglia la semiretta non potrà essere rappresentato da alcun numero intero o frazionario, poiché la sua distanza dall'origine è uguale alla diagonale del quadrato e quest'ultima è incommensurabile col suo lato, ossia in questo caso con l'unità di lunghezza. Pertanto, la moltitudine dei numeri frazionari, nonostante la diminuzione indefinita della loro differenza, non basta ancora a colmare, se così si può dire, gli intervalli tra i punti contenuti nella linea[3], il che significa che questa moltitudine non è un equivalente reale ed adeguato del continuo lineare; si è dunque costretti, per esprimere la misura di certe lunghezze, ad introdurre ulteriori specie di numeri, chiamati numeri incommensurabili, non aventi cioè comune misura con l'unità. Tali sono i numeri irrazionali, ossia quelli che rappresentano il risultato di un'estrazione di radice aritmeticamente impossibile, ad esempio la radice

---

numeri si sviluppi in un'unica direzione, come dicevamo sopra, è già sufficiente ad indicarne la ragione.

[2] Ciò sarà meglio precisato quando parleremo dei numeri inversi.

[3] È importante sottolineare che non diciamo i punti che compongono o che costituiscono la linea, poiché ciò corrisponderebbe ad una concezione falsa del continuo, come mostreranno le considerazioni che esporremo in seguito.

quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto; così, nell'esempio precedente, il rapporto tra la diagonale del quadrato ed il suo lato, e di conseguenza il punto la cui distanza dall'origine è uguale a questa diagonale, non possono che essere rappresentati dal numero irrazionale $\sqrt{2}$ il quale è veramente incommensurabile, poiché non esiste alcun numero, intero o frazionario, il cui quadrato sia uguale a 2; oltre a questi numeri irrazionali vi sono altri numeri incommensurabili la cui origine geometrica è evidente, come ad esempio il numero π che rappresenta il rapporto tra la circonferenza ed il suo diametro.

Senza addentrarci per il momento nella questione concernente la «composizione del continuo», si vede dunque che il numero, qualunque estensione si voglia attribuire alla sua nozione, non è mai ad esso perfettamente applicabile: tale applicazione riconduce insomma, in ogni caso, a sostituire il continuo con un discontinuo i cui intervalli possono risultare piccolissimi, e anche divenirlo sempre più con una serie indefinita di divisioni successive, ma senza poter mai essere soppressi, non essendovi in realtà «ultimi elementi» ai quali queste divisioni possano giungere, poiché una quantità continua, per piccola che sia, permane sempre indefinitamente divisibile. È a queste divisioni del continuo che risponde propriamente la notazione dei numeri frazionari; ma, ed è questo che importa particolarmente rilevare, una frazione, per piccola che sia, è sempre una quantità determinata, e tra due frazioni, per quanto poco differenti l'una dall'altra le si supponga, vi è sempre un intervallo parimenti determinato. Ora, la proprietà di divisibilità indefinita che caratterizza le grandezze continue esige evidentemente che si possano sempre assumere elementi piccoli quanto si vuole, e che gli intervalli esistenti tra questi elementi possano essere resi minori di ogni quantità data; ma inoltre – ed èqui che appare l'insufficienza dei numeri frazionari, e anzi possiamo dire di qualsiasi numero –, questi elementi e questi intervalli, affinché vi sia realmente continuità, non devono essere concepiti come qualcosa di determinato. Di conseguenza, la rappresentazione più adeguata della quantità continua sarà ottenuta mediante grandezze non più fisse e determinate come quelle di cui abbiamo appena parlato, ma al contrario variabili, perché la loro stessa variazione potrà allora essere vista come effettuantesi in maniera continua; tali quantità dovranno essere suscettibili di decrescere indefinitamente, tramite la loro variazione, senza mai annullarsi né pervenire ad un «minimum», il quale non sarebbe meno contraddittorio degli «ultimi elementi» del continuo: è proprio questa, come vedremo, la vera nozione delle quantità infinitesimali.

V - Questioni sollevate dal metodo infinitesimale

Quando Leibnitz fornì la prima esposizione del metodo infinitesimale[1], e poi ancora in molti altri lavori che seguirono[2], insistette soprattutto sugli utilizzi e sulle applicazioni del nuovo calcolo, cosa assai conforme alla tendenza moderna di attribuire maggiore importanza alle applicazioni pratiche della scienza piuttosto che alla scienza stessa come tale; del resto, sarebbe difficile dire se questa tendenza gli fosse veramente propria o se non vi fosse invece, in questo modo di presentare il suo metodo, solo una sorta di concessione da parte sua. Comunque sia non è certo sufficiente, per giustificare un metodo, mostrare i vantaggi che può presentare rispetto agli altri metodi ammessi in precedenza e le comodità che può offrire in pratica per il calcolo, e neppure i risultati che ha potuto produrre di fatto; è quanto gli avversari del metodo infinitesimale non mancarono di far valere, e furono solamente le loro obiezioni ad indurre Leibnitz a spiegarsi sui principi, e persino sulle origini del suo metodo. Circa quest'ultimo punto è d'altronde possibilissimo che egli non abbia mai detto tutto, ma in fondo poco importa, poiché le cause occasionali di una scoperta costituiscono molto spesso circostanze in sé piuttosto insignificanti; in ogni caso, ciò che per noi è interessante rilevare nelle indicazioni che fornisce in proposito[3], è come egli sia partito col considerare le differenze «assegnabili» esistenti tra i numeri, per passare quindi alle differenze «inassegnabili» che possono essere concepite tra le grandezze geometriche in ragione della loro continuità, e che proprio a quest'ordine attribuisse una grande importanza, come se fosse in qualche modo «imposto dalla natura delle cose». Ne discende che per lui le quantità infinitesimali non ci si presentano in modo naturale e immediato, ma solo come un risultato del passaggio dalla variazione della quantità discontinua a quello della quantità continua, e dell'applicazione della prima alla misura della seconda.

---

[1] *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, in «Acta Eruditorum», Leipzig, l684.

[2] *De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum*, in «Acta Eroditorum», Leipzig, 1686. – I lavori successivi riguardano tutti la soluzione di problemi particolari.

[3] Dapprima nella sua corrispondenza, e in seguito in *Historia et origo Calculi differentialis*, 1714.

Ora, qual è esattamente il significato di queste quantità infinitesimali, che si è rimproverato a Leibnitz di impiegare senza aver definito preliminarmente cosa intendesse con esse, e inoltre tale significato gli permetteva di considerare il suo calcolo come assolutamente rigoroso, o, al contrario, soltanto come un semplice metodo d'approssimazione? Rispondere a queste due domande significherebbe per ciò stesso risolvere le obiezioni più importanti che gli erano state mosse; malauguratamente, egli non lo ha mai fatto in modo molto chiaro, e anzi le sue diverse risposte non sembrano sempre perfettamente conciliabili tra loro. A questo proposito è bene sottolineare come Leibnitz avesse del resto, in generale, l'abitudine di spiegare in maniera differente le medesime cose secondo le persone cui si rivolgeva; non saremo certo noi a rimproverargli un tale modo di agire, irritante solamente per gli animi sistematici, poiché, in linea di principio, in questo non faceva altro che conformarsi ad un precetto iniziatico e più particolarmente rosacrociano, secondo il quale conviene parlare a ciascuno nel suo proprio linguaggio; solo che gli capitava talvolta di applicarlo assai male. In effetti, se è evidentemente possibile rivestire una stessa verità con espressioni differenti, questo va fatto, beninteso, senza mai deformarla né sminuirla, astenendosi sempre accuratamente da ogni modo di esprimersi che possa dar luogo a false concezioni; ciò che Leibnitz in molti casi non ha saputo fare[4]. Così, egli spinge l'«adattamento» fino a sembrare talora dar ragione a quanti hanno voluto vedere nel suo calcolo solo un metodo di approssimazione, poiché gli accade di presentarlo come se non fosse altro che una sorta di compendio del «metodo di esaustione» degli antichi, atto a facilitare le scoperte ma i cui risultati, se si vuol darne una dimostrazione rigorosa, devono essere in seguito verificati con quest'ultimo metodo; eppure è ben certo che non fosse questo in fondo il suo pensiero, e che in realtà egli vi vedesse ben più di un semplice espediente destinato ad abbreviare i calcoli.

Leibnitz dichiara frequentemente che le quantità infinitesimali non sono che degli «incomparabili», ma, riguardo al senso preciso in cui va inteso questo termine, gli accade di darne una spiegazione non solo poco soddisfacente, ma altresì assai deplorevole, poiché questa non poteva che fornire armi ai suoi avversari, i quali d'altronde non mancarono di servirsene; anche in questo caso egli non ha certamente espresso il suo vero pensiero, e possiamo vedervi un altro esempio, ancor più grave del precedente, di quell'«adattamento» eccessivo che fa sostituire con vedute erronee un'espressione «adattata» della verità. Leibnitz scrisse infatti: «Non v'è bisogno di assumere qui l'infinito a rigore, ma solo come quando in

[4] In linguaggio rosacrociano si direbbe che questo, come e più del fallimento dei suoi progetti di «*characteristica universalis*», provi che, pur avendo qualche idea teorica circa il «dono delle lingue», egli fosse tuttavia lungi dall'averlo ricevuto in maniera effettiva. [Si veda in proposito René Guénon, *Considerazioni sull'iniziazione*, cit., cap. XXXVII. N.d.T.].

ottica si dice che i raggi del sole provengono da un punto infinitamente lontano cosicché sono reputati paralleli. E quando vi sono molteplici gradi d'infinito o d'infinitamente piccolo, è come il globo della terra che è reputato un punto rispetto alla distanza del firmamento, ed una palla che maneggiamo è ancora un punto in confronto al semidiametro del globo della terra, cosicché la distanza del firmamento è come un infinito dell'infinito rispetto al diametro della palla. Poiché, in luogo dell'infinito o dell'infinitamente piccolo, si prendono quantità tanto grandi e tanto piccole quanto occorre affinché l'errore sia minore dell'errore dato, cosicché non si differisca dallo stile di Archimede se non nelle espressioni, più dirette nel nostro metodo, e più conformi all'arte di inventare»[5]. Non si mancò di far notare a Leibnitz che, per piccolo che sia il globo della terra in rapporto al firmamento, o un granello di sabbia in rapporto al globo della terra, queste sono nondimeno quantità fisse e determinate, e, se una di tali quantità può essere ritenuta praticamente trascurabile in confronto all'altra, non si tratta tuttavia che di una semplice approssimazione; egli rispose che aveva voluto soltanto «evitare le sottigliezze» e «rendere il ragionamento evidente a tutti»[6], il che conferma appunto la nostra interpretazione, e costituisce inoltre già come una manifestazione della tendenza «volgarizzatrice» propria agli scienziati moderni. Quel che è assai straordinario è che in seguito abbia potuto scrivere: «Almeno non vi era la minima cosa che dovesse far giudicare che intendessi una quantità invero molto piccola, ma pur sempre fissa e determinata», al che aggiunge: «Del resto, avevo scritto già qualche anno fa a Bernoulli di Groningen che gli infiniti e gli infinitamente piccoli potrebbero essere presi per delle finzioni, simili alle radici immaginarie[7], senza che ciò dovesse far torto al nostro calcolo, essendo tali finzioni utili e fondate nella realtà»[8]. D'altronde, sembra proprio che egli non abbia mai visto esattamente in cosa il paragone di cui si era servito fosse errato, dato che lo riprese ancora negli stessi termini una decina d'anni più tardi[9]; ma, poiché per lo meno dichiara espressamente che non è stata sua intenzione presentare le quantità infinitesimali come determinate, dobbiamo concluderne che per lui il senso di tale paragone si riduce a questo: un granello di sabbia, pur non essendo infinitamente piccolo, può tuttavia senza inconvenienti apprezzabili essere ritenuto tale in rapporto alla terra, cosicché non occorre considerare degli infinitamente

---

[5] *Mémoire de M.G.G. Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel*, in «Journal de Trévoux», 1701.

[6] Lettera a Varignon 2 febbraio 1702; [trad. it.: «Lettera a Pierre Varignon», *Scritti filosofici*, voI. I, UTET, Torino, 2000].

[7] Le radici immaginarie sono le radici dei numeri negativi; parleremo più avanti della questione dei numeri negativi e delle difficoltà logiche cui dà luogo.

[8] Lettera a Varignon, 14 aprile 1702.

[9] Memoria già citata sopra [Cap. III, nota 5], in «Acta Eruditorum», Leipzig, 1712.

piccoli «a rigore», e si può anzi, se si vuole, reputarli solamente finzioni; una simile argomentazione però, comunque la si voglia intendere, non è meno manifestamente impropria a offrire del calcolo infinitesimale un'idea diversa da quella – certo insufficiente agli occhi dello stesso Leibnitz – di un semplice calcolo d'approssimazione.

VI - Le «finzioni ben fondate»

Il pensiero che Lebnitz esprime in maniera più costante – benché non lo affermi sempre con la stessa forza, ed anzi talvolta, sia pure eccezionalmente, sembri non volersi pronunciare categoricamente al riguardo –, è che in fondo le quantità infinite ed infinitamente piccole non sono che finzioni; ma, aggiunge, sono «finzioni ben fondate», e con ciò non intende soltanto che siano utili per il calcolo[1], o anche per far «trovare verità reali», sebbene gli accada ugualmente di insistere su tale utilità; ripete Invece costantemente che queste finzioni sono «fondate nella realtà», che esse hanno «*fundamentum in re*», il che implica evidentemente qualcosa di più di un valore puramente utilitario; e, in definitiva, questo stesso valore deve spiegarsi, secondo lui, mediante il fondamento che tali finzioni hanno nella realtà. In ogni caso egli reputa sufficiente, affinché il metodo sia sicuro, considerare non quantità infinite ed infinitamente piccole nel senso rigoroso di queste espressioni – dato che tale senso rigoroso non corrisponde ad alcuna realtà –, ma quantità tanto grandi o tanto piccole quanto si voglia, o quanto sia necessario affinché l'errore sia reso minore di qualsiasi quantità data; occorrerebbe anche esaminare se sia vero, come egli dichiara, che tale errore sia per ciò stesso nullo, ossia se un simile modo di intendere il calcolo infinitesimale gli conferisca un fondamento perfettamente rigoroso, ma dovremo tornare in seguito su tale questione. Comunque stiano le cose circa quest'ultimo punto, gli enunciati in cui figurano le quantità infinite ed infinitamente piccole rientrano per lui nella categoria di asserzioni, egli dice, solo «*toleranter verae*», o, come si direbbe in italiano, «passabili», che hanno bisogno di essere «rettificate» mediante la spiegazione che se ne offre, come quando le quantità negative sono considerate «minori di zero», e come in molti altri casi in cui il linguaggio dei geometri implica «una certa maniera di esprimersi figurata e criptica»[2]; quest'ultimo vocabolo sembrerebbe alludere al senso simbolico e profondo della geometria, ma esso è tutt'altra cosa rispetto a quel che Leibnitz ha in vista, e, come gli accade assai di frequente, forse in ciò non vi è che il ricordo di qualche dato esoterico più o meno mal compreso.

---

[1] In queste considerazioni di utilità pratica Carnot ha creduto di trovare una giustificazione sufficiente; è evidente che, da Leibnitz a lui, la tendenza «pragmatista» della scienza moderna si era già fortemente accentuata.

[2] Memoria già citata, in «Acta Eruditorum», Leipzig, 1712.

Quanto al senso in cui si debba intendere che le quantità infinitesimali sono «finzioni ben fondate», Leibnitz dichiara che «gli infiniti ed infinitamente piccoli sono talmente fondati che tutto si fa in geometria, e persino in natura, come se fossero perfette realtà»[3]; per lui, infatti, tutto ciò che esiste in natura implica in qualche modo la considerazione dell'infinito, o almeno di quel che crede di poter chiamare così: «La perfezione dell'analisi dei trascendenti o della geometria ove entri la considerazione di un qualche infinito - egli dice – sarebbe senza dubbio la più importante a causa della sua possibile applicazione alle operazioni della natura, che introduce l'infinito in tutto ciò che fa»[4]; ma questo forse soltanto perché, in verità, non possiamo averne idee adeguate, e perché intervengono sempre elementi che non percepiamo tutti distintamente. Se così fosse, non si dovrebbero prendere troppo alla lettera asserzioni come questa, ad esempio: «Essendo propriamente il nostro metodo quella parte della matematica generale che tratta dell'infinito, ciò fa sì che se ne abbia gran bisogno applicando la matematica alla fisica, poiché il carattere dell'Autore infinito entra ordinariamente nelle operazioni della natura»[5]. Ma, anche se con ciò Leibnitz intendesse soltanto che la complessità delle cose naturali oltrepassa incomparabilmente i limiti della nostra percezione distinta, resterebbe nondimeno il fatto che le quantità infinite ed infinitamente piccole devono avere il loro «*fundamentum in re*»; tale fondamento presente nella natura delle cose, almeno nella maniera in cui la concepisce, non è altro che quella che egli chiama «legge di continuità», che dovremo esaminare più avanti e che da lui è ritenuta, a torto o a ragione, un caso particolare di una certa «legge di giustizia» – essa stessa ricollegata in definitiva alla considerazione dell'ordine e dell'armonia –, che trova parimenti la sua applicazione ogni qual volta una certa simmetria debba essere osservata, come accade ad esempio nelle combinazioni e nelle permutazioni.

Ora, se le quantità infinite ed infinitamente piccole non sono che finzioni, e pur ammettendo che siano realmente «ben fondate», ci si può chiedere: perché impiegare siffatte espressioni le quali, per quanto possano essere reputate «*toleranter verae*», sono nondimeno scorrette? Vi è in ciò qualcosa che già presagisce, si potrebbe dire, il «convenzionalismo» della scienza attuale, ma con la notevole differenza che quest'ultimo non si preoccupa più in alcun modo di sapere se le finzioni cui è ricorso siano o no fondate, o, secondo un'altra espressione di Leibnitz, se possano essere interpretate «*sano sensu*», e neppure se abbiano un significato qualsiasi. D'altra parte, poiché si può fare a meno di tali quantità fittizie e accontentarsi di considerare, al loro posto, quantità che si possono

---

[3] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

[4] Lettera al marchese de l'Hospital, 1693.

[5] *Considération sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire et le nouveau Calcul des transcendantes*, in «Journal des Sçavans», 1694.

semplicemente rendere tanto grandi e tanto piccole quanto si vuole - e che, per tale ragione, possono dirsi indefinitamente grandi e indefinitamente piccole -, sarebbe stato meglio senza dubbio cominciare da qui, ed evitare così di introdurre finzioni le quali, qualunque possa essere del resto il loro «*fundamentum in re*», non sono insomma di alcuna utilità effettiva non solo per il calcolo, ma per lo stesso metodo infinitesimale. Le espressioni «indefinitamente grande» e «indefinitamente piccolo», o, il che è lo stesso ma è forse ancora più preciso, «indefinitamente crescente» e «indefinitamente decrescente», non hanno soltanto il vantaggio di essere le sole rigorosamente esatte; hanno inoltre quello di mostrare chiaramente che le quantità cui si applicano non possono che essere variabili e non determinate. Come ha detto con ragione un matematico, «l'infinitamente piccolo non è una quantità molto piccola, avente un valore attuale, suscettibile di determinazione; il suo carattere è di essere eminentemente variabile e di poter assumere un valore minore di tutti quelli che si vorrebbero precisare; sarebbe molto meglio chiamarlo indefinitamente piccolo»[6].

L'impiego di questi termini avrebbe evitato tante difficoltà e tante discussioni, ed in ciò non vi è nulla di stupefacente, non trattandosi di una semplice questione di parole, ma della sostituzione di un'idea falsa con un'idea giusta, di una finzione con una realtà; non avrebbe consentito, in particolare, di scambiare le quantità infinitesimali per quantità fisse e determinate, il termine «indefinito» comportando sempre di per sé un'idea di «divenire», come dicevamo sopra, e di conseguenza di cambiamento, o, quando si tratta di quantità, di variazione; se Leibnitz se ne fosse servito abitualmente, non si sarebbe senza dubbio lasciato indurre così facilmente al deplorevole paragone del granello di sabbia, Inoltre, ridurre «*infinite parva ad indefinite parva*» sarebbe stato in ogni caso più chiaro che ridurli «*ad incomparabiliter parva*»; ne avrebbe guadagnato la precisione senza che ne risentisse l'esattezza, ben al contrario. Le quantità infinitesimali sono senza dubbio «incomparabili» con le quantità ordinarie, ma ciò potrebbe intendersi in più di un modo, e lo si è effettivamente inteso assai spesso in sensi differenti da quello in cui si sarebbe dovuto; è meglio dire, secondo un'altra espressione di Leibnitz, che esse sono «inassegnabili», poiché quest'ultimo termine sembrerebbe proprio potersi intendere in senso rigoroso solo per quantità suscettibili di divenire piccole quanto si vuole, ossia più piccole di ogni quantità data, ed alle quali non si può di

[6] Charles de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, Mallet-Bachelier. Paris, 1860, pp. 21-22. - L'autore aggiunge: «Ma la prima denominazione (quella di infinitamente piccolo) avendo prevalso nel linguaggio, abbiamo ritenuto doverla conservare». È questo uno scrupolo sicuramente eccessivo, poiché l'uso non può bastare a giustificare le scorrettezze e le improprietà di linguaggio, e, se non si osasse mai ergersi contro abusi di questo genere, non si potrebbe neppur cercare di introdurre nei termini maggiore esattezza e precisione di quella che comporta il loro impiego coerente.

conseguenza «assegnare» alcun valore determinato, per piccolo che sia; è ben questo in effetti il senso degli «*indefinite parva*». Malauguratamente, è pressoché impossibile sapere se, nel pensiero di Leibnitz, «incomparabile» e «inassegnabile» siano veramente e completamente sinonimi; ma, in ogni caso, è certo perlomeno che una quantità propriamente «inassegnabile», in ragione della possibilità di diminuzione indefinita che comporta, sia per ciò stesso «incomparabile» con ogni quantità data, ed anche, per estendere tale idea ai differenti ordini infinitesimali, con ogni quantità in rapporto alla quale possa decrescere indefinitamente, mentre quest'ultima è vista come dotata di una fissità almeno relativa.

Se c'è un punto sul quale tutti possono insomma mettersi facilmente d'accordo, persino senza approfondire maggiormente le questioni di principio, è che la nozione di indefinitamente piccolo, almeno dal punto di vista puramente matematico, è pienamente sufficiente all'analisi infinitesimale, e gli stessi «infinitisti» lo riconoscono senza troppa difficoltà[7]. A tale proposito ci si può dunque attenere ad una definizione come quella di Carnot: «Cos'è una quantità infinitamente piccola in matematica? Null'altro che una quantità che si può rendere piccola quanto si vuole, senza che si sia obbligati per questo a far variare quelle di cui si cerca la relazione»[8]. Circa il vero significato delle quantità infinitesimali, però, tutta la questione non si riduce a ciò: poco importa per il calcolo che gli infinitamente piccoli siano solo finzioni, poiché ci si può accontentare della considerazione degli indefinitamente piccoli, il che non solleva alcuna difficoltà logica; d'altronde, giacché non possiamo ammettere, per le ragioni metafisiche esposte all'inizio, un infinito quantitativo - sia esso un infinito di grandezza o di piccolezza -[9], né alcun infinito di un qualunque ordine determinato e relativo, è ben certo che queste non possano che essere finzioni e null'altro; ma, se tali finzioni sono state introdotte a torto o a ragione all'origine del calcolo infinitesimale, il fatto è che, nelle intenzioni di Leibnitz, dovevano tuttavia corrispondere a qualcosa per quanto difettosa fosse la maniera in cui l'esprimevano. Poiché è di principi che ci occupiamo qui, e non di un procedimento di calcolo ridotto in qualche modo a se stesso, il che sarebbe per noi privo di interesse, dobbiamo dunque chiederci quale

---

[7] Si veda in particolare Louis Couturat, *De l'infini mathématique*, Alcan, Paris, 1896. p. 265, nota: «Si può costituire logicamente il calcolo infinitesimale sulla sola nozione di indefinito…». - È vero che l'impiego del termine «logicamente» implica qui una riserva poiché, per l'autore, esso si oppone a «razionalmente», il che costituisce del resto una terminologia assai strana; l'ammissione è da ritenere nondimeno interessante.

[8] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, Duprat, Paris, 1797, p. 7, nota; cfr. *ibid.*, p. 20. – Il titolo di quest'opera è ben poco giustificato poiché, in realtà, non vi si trova la minima idea di ordine metafisico.

[9] La fin troppo celebre concezione dei «due infiniti» di Pascal è metafisicamente assurda, e non è, ancora una volta, che il risultato di una confusione tra infinito e indefinito, assumendo quest'ultimo nei due sensi opposti delle grandezze crescenti e decrescenti.

sia esattamente il valore di tali finzioni, non solo dal punto di vista logico, ma anche dal punto di vista ontologico, se esse siano così «ben fondate» come credeva Leibnitz, e se davvero possiamo dire con lui che siano «*toleranter verae*» ed accettarle almeno come tali, «*modo sano sensu intelligantur*»; per rispondere a queste domande dovremo esaminare più da vicino la sua concezione della «legge di continuità», poiché in essa egli pensava di trovare il «*fundamentum in re*» degli infinitamente piccoli.

VII - I «gradi di infinità»

Non abbiamo ancora avuto occasione di vedere, in quel che precede, tutte le confusioni che si introducono inevitabilmente qualora si ammettano accezioni dell'idea di infinito differenti dal suo solo significato vero e propriamente metafisico; se ne troverebbe più di un esempio, in particolare, nella lunga discussione che Leibnitz ebbe con Jean Bernoulli circa la realtà delle quantità infinite ed infinitamente piccole, discussione che d'altronde non condusse ad alcuna conclusione definitiva, né lo avrebbe potuto, dato che tali confusioni erano commesse ad ogni istante dall'uno come dall'altro, e data la mancanza di principi da cui derivavano; del resto, in qualunque ordine di idee ci si ponga, è sempre e solo la mancanza di principi a rendere le questioni insolubili. Ci si può stupire, tra le altre cose, che Leibnitz abbia posto una differenza tra «infinito» e «interminato», e non abbia così respinto in modo assoluto l'idea - nondimeno manifestamente contraddittoria - di un «infinito terminato», tanto che giunge sino al punto di chiedersi «se è possibile che esista ad esempio una linea retta infinita, e tuttavia terminata da una parte e dall'altra»[1]. Senza dubbio gli ripugna ammettere una simile possibilità, «in quanto mi è parso – dice altrove – che l'infinito inteso a rigore debba avere la propria origine nell'interminato, senza di che non vedo modo di trovare un fondamento atto a distinguerlo dal finito»[2]. Tuttavia, anche se si dice, in maniera più affermativa di quanto egli faccia, che «l'infinito ha la propria origine nell'interminato», ancora non lo si considera ad esso assolutamente identico, ma lo si distingue in una certa misura; e, finché è così, si rischia di trovarsi intrappolati in una folla di idee strane e contraddittorie. È vero che queste idee, Leibnitz lo dichiara, non le ammetterebbe volentieri, e occorrerebbe che vi fosse «costretto da dimostrazioni indubitabili»; ma è già assai grave attribuirvi una certa importanza, e reputarle altrimenti che pure impossibilità; per quanto concerne, ad esempio, l'idea di una sorta di «eternità terminata», che è tra quelle da lui enunciate in proposito, non possiamo scorgervi se non il prodotto di una confusione tra la nozione di eternità e quella di durata, assolutamente ingiustificabile nei riguardi della metafisica. Ammettiamo senza alcuna difficoltà che il tempo nel quale scorre la nostra vita corporea sia realmente indefinito, ma ciò non esclude affatto che sia «terminato da

---

[1] Lettera a Jean Bernoulli, 18 novembre 1698.

[2] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

una parte e dall'altra», che abbia cioè sia un'origine sia una fine, conformemente alla concezione ciclica tradizionale; ammettiamo altresì l'esistenza di altri modi della durata, come quello che gli scolastici chiamavano *aevum*, la cui indefinitezza è, per così dire, indefinitamente più grande di quella del tempo; ma tutti questi modi, in tutta la loro estensione possibile, sono tuttavia soltanto indefiniti, trattandosi in ogni caso di condizioni particolari di esistenza proprie a tale o talaltro stato; nessuno di essi, per il fatto stesso di essere una durata, e di implicare quindi una successione, può essere identificato o assimilato all'eternità, con la quale non ha in realtà più rapporti di quanti il finito, in qualunque suo modo, ne abbia con il vero Infinito, la concezione di un'eternità relativa non avendo più senso di quanto ne abbia un'infinità relativa. In tutto ciò vi sono da considerare soltanto ordini differenti di indefinitezza, come vedremo ancor meglio in seguito; ma Leibnitz, avendo mancato di operare le distinzioni necessarie ed essenziali – e soprattutto di porre in primo luogo il principio che, solo, gli avrebbe permesso di non smarrirsi mai –, si trova in forte imbarazzo nel rifiutare le opinioni di Bernoulli, il quale lo crede anzi, tanto le sue risposte sono equivoche ed esitanti, meno lontano di quanto sia in realtà dalle proprie idee sulla «infinità dei mondi» ed i differenti «gradi di infinità».

Tale concezione dei pretesi «gradi di infinità» presuppone insomma che possano esistere mondi incomparabilmente più grandi e più piccoli del nostro, le parti corrispondenti di ciascuno di essi mantenendo proporzioni equivalenti, cosicché gli abitanti di uno qualunque di questi mondi potrebbero reputarlo infinito con altrettanta ragione di quanto noi facciamo nei confronti del nostro; diremmo piuttosto, da parte nostra, con altrettanta poca ragione. Un simile modo di considerare le cose non avrebbe *a priori* nulla di assurdo senza l'introduzione dell'idea di infinito, la quale certamente non ha nulla a che vedervi: ciascuno di questi mondi, per quanto grande lo si supponga, è nondimeno limitato, come si può allora chiamarlo infinito? La verità è che nessuno di essi può esserlo realmente, non foss'altro perché sono concepiti come molteplici, e siamo perciò di nuovo ricondotti alla contraddizione di una pluralità di infiniti; d'altronde, se a certuni e persino a molti accade di considerare in tal modo il nostro mondo, non è men vero che tale asserzione non può presentare alcun senso accettabile. Del resto, ci si può chiedere se si tratti proprio di mondi differenti o non piuttosto, molto semplicemente, di parti più o meno estese di uno stesso mondo, poiché, per ipotesi, debbono essere tutti sottomessi alle medesime condizioni di esistenza, ed in particolare alla condizione spaziale, sviluppandosi ad una scala semplicemente ingrandita o rimpicciolita. È in tutt'altro senso che si può davvero parlare non affatto dell'infinità, ma dell'indefinitezza dei mondi, e ciò soltanto perché, al di fuori di condizioni di esistenza quali lo spazio ed il tempo, proprie al nostro mondo considerato in tutta l'estensione di cui è suscettibile, ve ne sono

un'indefinitezza d'altre ugualmente possibili; un mondo, cioè insomma uno stato di esistenza, si definirà così tramite l'insieme delle condizioni cui è sottomesso; ma, appunto perché sarà sempre condizionato, ossia determinato e limitato, e non comprenderà dunque tutte le possibilità, non lo si potrà mai reputare infinito, ma solamente indefinito[3].

In fondo, la concezione di «mondi» incomparabilmente più grandi e più piccoli gli uni rispetto agli altri, nel senso in cui l'intende Bernoulli, non è molto diversa da quella cui Leibnitz ricorre quando considera «il firmamento in rapporto alla terra, e la terra in rapporto ad un granello di sabbia», e quest'ultimo in rapporto ad «una particella di materia magnetica che passa attraverso il vetro». Sennonché, Leibnitz non pretende di parlare qui di «*gradus infinitatis*» in senso proprio; al contrario, intende mostrare che «non v'è bisogno di assumere qui l'infinito a rigore», e si limita a considerare degli «incomparabili», cosa contro la quale nulla gli si può obiettare logicamente. Il difetto del suo paragone è di tutt'altro ordine, e consiste, come abbiamo già detto, nel fatto che esso non poteva che fornire un'idea inesatta, e persino del tutto falsa, delle quantità infinitesimali quali si introducono nel calcolo. Avremo in seguito occasione di sostituire a tale concezione quella dei veri gradi molteplici di indefinitezza, tanto nell'ordine crescente quanto nell'ordine decrescente; dunque per il momento non vi insisteremo oltre.

La differenza tra Bernoulli e Leibnitz, insomma, consiste nel fatto che, per il primo, si tratta veramente di «gradi di infinità», benché li presenti solo come una congettura probabile, mentre il secondo, dubitando della loro probabilità e persino della loro possibilità, si limita a sostituirli con quelli che si potrebbero chiamare «gradi di incomparabilità». A parte questa differenza, del resto sicuramente molto importante, la concezione di una sede di mondi simili ma a scale differenti è loro comune; detta concezione non è priva di un certo rapporto, almeno occasionale, con le scoperte, alla stessa epoca, dovute all'impiego del microscopio, e con certe vedute che allora suggerirono – che non furono però in alcun modo giustificate dalle osservazioni successive –, come la teoria dell'«incastonamento[4] dei germi»: non è vero che, nel germe, l'essere vivente sia attualmente e corporalmente «preformato» in tutte le sue parti, e l'organizzazione di una cellula non ha alcuna somiglianza con quella dell'insieme del corpo di cui è un elemento. Almeno per quanto riguarda Bernoulli non pare dubbio che risieda in ciò, di fatto, l'origine della sua concezione; egli dice in effetti, tra le altre cose molto significative al riguardo, che le particelle di un corpo coesistono nel tutto «come, secondo Harvey ed altri, ma non secondo Leuwenhœck, vi

---

[3] Si veda in proposito *Les États multiples de l'être*, cit.

[4] Nell'originale francese «embôitement». Il termine esprime l'idea di mia successione di incastri sovrapposti, nel senso in cui sono «incastrate» o «incastonate» l'una nell'altra le scatole cinesi [NdT].

sono in un animale innumerevoli ovuli, in ciascun ovulo uno o più animalculi, in ciascun animalculo a sua volta innumerevoli ovuli, e così all'infinito»[5]. Quanto a Leibnitz, nel suo caso vi è verosimilmente tutt'altra cosa al punto di partenza: così, l'idea che tutti gli astri che vediamo potrebbero non costituire altro che elementi del corpo di un essere incomparabilmente più grande di noi, ricorda la concezione del «Grande Uomo» della Cabala, ma singolarmente materializzata e «spazializzata», per una sorta di ignoranza del vero valore analogico del simbolismo tradizionale; parimenti, l'idea dell'«animale», ossia dell'essere vivente, sussistente corporalmente dopo la morte ma «ridotto in piccolo», è manifestamente ispirata alla concezione del *luz* o «nocciolo d'immortalità» secondo la tradizione giudaica[6], concezione che Leibnitz ugualmente deforma ponendola in rapporto con quella di mondi incomparabilmente più piccoli del nostro, poiché, egli dice, «nulla impedisce che gli animali morendo siano trasferiti in tali mondi; penso, infatti, che la morte non sia altro che una contrazione dell'animale, come la generazione non è altro che un'evoluzione»[7], quest'ultimo termine essendo qui inteso semplicemente nel suo significato etimologico di «sviluppo». In fondo, tutto ciò non è che un esempio del pericolo insito nel voler accordare le nozioni tradizionali con le vedute della scienza profana, cosa che si può fare solo a detrimento delle prime; queste erano sicuramente del tutto indipendenti dalle teorie suscitate con le osservazioni microscopiche, e Leibnitz, accostando e frammischiando le une alle altre, agiva già come dovevano fare più tardi gli occultisti, i quali si dilettano in modo tutto speciale con simili accostamenti ingiustificati. D'altra parte, la sovrapposizione di «incomparabili» di ordini differenti gli sembrava conforme alla sua concezione del «migliore dei mondi», come in grado cioè di offrire un mezzo per porvi, secondo la sua definizione, «tutto quanto l'essere o la realtà possibile»; quest'idea del «migliore dei mondi» proviene anch'essa da un altro dato tradizionale mal applicato, preso a prestito dalla geometria simbolica dei Pitagorici, come abbiamo già indicato altrove[8]: la circonferenza, tra tutte le linee di uguale lunghezza, è quella che avviluppa la superficie massima, e parimenti la sfera, tra tutti i corpi di uguale superficie, è quello che contiene il volume massimo, ed è questa una della ragioni per cui tali figure erano considerate le più perfette; tuttavia, se vi è a tale riguardo un massimo, non vi è però un minimo, non esistendo figure che racchiudano una superficie o un volume minore di ogni altro; per

---

[5] Lettera del 23 luglio 1698.

[6] Si veda *Le Roi du Monde*, Ch. Bosse, Paris, 1927, pp. 87-89; [trad. it.: Il Re del Mondo, Adelphi, Milano, 1977].

[7] Lettera a Jean Bernoulli, 18 novembre 1698, cit.

[8] *Le Symbolisme de la Croix*, Éditions Véga, Paris, 1931, p. 58; [trad. it.: *Il simbolismo della Croce*, Luni, Milano, 1998]. – Sulla distinzione tra «possibili» e «compossibili», dalla quale dipende d'altronde la concezione del «migliore dei mondi», cfr. *Les États multiples de l'être*, cit., cap. II.

questo Leibnitz è stato indotto a pensare che, se vi è un «migliore dei mondi», non vi è però un «peggiore dei mondi», ossia un mondo contenente meno essere di un qualunque altro mondo possibile. Si sa d'altronde che a questa concezione del «migliore dei mondi», come a quella degli «incomparabili», si ricollegano i suoi ben noti paragoni del «giardino pieno di piante» e dello «stagno pieno di pesci», ove «ciascun ramo della pianta, ciascun membro dell'animale ciascuna goccia dei suoi umori è a sua volta un tale giardino o un tale stagno»[9]; questo ci conduce naturalmente ad affrontare un'altra questione connessa, quella della «divisione della materia all'infinito».

[9] *Monadologie*, 1714, 67; [trad. it.: *Monadologia*, Bompiani, Milano, 2001]; cfr. *ibid.*, 74.

VIII - «Divisione all'infinito» o divisibilità indefinita

Per Leibniz la materia è non solo divisibile, ma «suddivisa attualmente senza fine» in tutte le sue parti, «ciascuna parte in altre parti, ognuna delle quali ha un qualche moto proprio»[1]; è soprattutto su questo che insiste per sostenere teoricamente la concezione da noi esposta per ultima: «Consegue dalla divisione attuale che, in una qualunque parte della materia, per piccola che sia, vi è come un mondo costituito da creature innumerevoli»[2]. Anche Bernoulli ammette questa divisione attuale della materia «*in partes numero infinitas*», ma ne trae conseguenze che Leibniz non ammette: «Se un corpo finito – dice – ha un numero infinito di parti, ho sempre creduto e credo ancora che la più piccola di queste parti debba avere col tutto un rapporto inassegnabile o infinitamente piccolo»[3]; al che Leibniz risponde: «Pur se si concorda che non vi sia alcuna porzione della materia attualmente non divisa, non si giunge tuttavia ad elementi indivisibili, o a parti più piccole di tutte le altre o infinitamente piccole, ma solo a parti sempre più piccole, le quali sono tuttavia quantità ordinarie, così come, aumentando, si giunge a quantità sempre più grandi»[4]. Leibniz contesta dunque l'esistenza delle «*minimae portiones*» o degli «ultimi elementi»; per Bernoulli, al contrario, sembra chiaro che la divisione attuale implichi l'esistenza simultanea di tutti gli elementi, così come, data una serie «infinita», tutti i termini che la costituiscono debbano essere dati simultaneamente, il che implicherebbe l'esistenza del «*terminus infinitesimus*». Ma, per Leibniz, l'esistenza di questo termine non è meno contraddittoria di quella di un «numero infinito», e la nozione del più piccolo dei numeri, o della «*fractio omnium infima*», non lo è meno di quella del più grande dei numeri; quel che egli considera l'«infinità» di una serie si caratterizza per l'impossibilità di pervenire ad un ultimo termine, così come la materia non sarebbe divisa «all'infinito» se questa divisione potesse compiersi e giungere a degli «ultimi elementi»; e non solo non possiamo pervenire di fatto a questi ultimi elementi, come concede Bernoulli, ma essi non devono neppure esistere in natura. Non vi sono elementi corporei indivisibili, o «atomi» nel senso

---

[1] *Monadologie*, cit. 65.

[2] Lettera a Jean Bernoulli, 12-22 luglio 1698.

[3] Lettera del 23 luglio 1698, cit.

[4] Lettera del 29 luglio 1698.

proprio del termine, più di quanto vi siano, nell'ordine numerico, frazioni indivisibili che non possano generare frazioni sempre più piccole, o più di quanto vi siano, nell'ordine geometrico, elementi lineari che non possano suddividersi in elementi ancora più piccoli.

In fondo, il significato in cui Leibnitz, in tutto ciò, assume il temine «infinito», è esattamente quello secondo il quale parla, come abbiamo visto, di una «moltitudine infinita»: dire che una serie qualunque, compresa la serie dei numeri interi, è infinita, significa per lui non che essa debba giungere ad un «*terminus infinitesimus*» o ad un «numero infinito», ma al contrario che non deve avere un ultimo termine, poiché i termini che essa comprende sono «*plus quam numero designari possint*», costituiscono cioè una moltitudine che oltrepassa ogni numero. Parimenti, se si può dire che la materia è divisa all'infinito, è perché una qualunque delle sue porzioni, per piccola che sia, avviluppa sempre una tale moltitudine; in altri termini, la materia non ha «*partes minimae*» o elementi semplici, essa è essenzialmente un composto: «È vero che le sostanze semplici, che non sono cioè esseri per aggregazione, sono veramente indivisibili, ma esse sono immateriali, e non sono che principi d'azione»[5]. È nel senso di una moltitudine innumerabile, d'altronde il più abituale in Leibnitz, che l'idea del cosiddetto infinito può applicarsi alla materia, all'estensione geometrica ed in generale al continuo, considerato in rapporto alla sua composizione; del resto, tale senso non riguarda esclusivamente l'«*infinitum continuum*», ma si estende pure all'«*infinitum discretum*», come abbiamo visto nell'esempio della moltitudine di tutti i numeri ed in quello delle «serie infinite». Per questo Leibnitz poteva affermare che una grandezza è infinita in ciò che ha di «inesauribile», di modo «che si può sempre assumere una grandezza piccola quanto si vuole»; e «rimane vero ad esempio che 2 è tanto quanto

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \text{ ecc.,}$$

ossia una serie infinita in cui tutte le frazioni – aventi per numeratore 1 e denominatori in progressione geometrica doppia – sono comprese ad un tempo, benché si impieghino solo numeri ordinari e non vi si introduca alcuna frazione infinitamente piccola, o il cui denominatore sia un numero infinito»[6]. Inoltre, quanto appena detto permette di comprendere come Leibnitz, pur affermando che l'infinito, nel senso in cui lo intende, non è un tutto, possa ciononostante applicare tale idea al continuo: un insieme continuo, come un corpo qualunque, costituisce certamente un tutto, ed anche quel che abbiamo chiamato in precedenza un vero tutto, logicamente anteriore alle sue parti ed indipendente da esse, ma è evidentemente sempre finito come tale; non è dunque in rapporto al tutto che Leibnitz può chiamarlo infinito, ma soltanto in rapporto alle parti in cui è o può essere

[5] Lettera a Varignon, 20giugno 1702.

[6] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

diviso, ed in quanto la moltitudine di tali parti oltrepassa effettivamente ogni numero assegnabile: è quella che si potrebbe chiamare una concezione analitica dell'infinito, dovuta al fatto che la moltitudine in questione è inesauribile solo analiticamente, come spiegheremo più avanti.

Se ora ci chiediamo quale valore abbia l'idea della «divisione all'infinito», bisogna riconoscere che essa, come quella della «moltitudine infinita», contiene una certa parte di verità, benché espressa in un modo che è lungi dall'essere esente da critiche: intanto va da sé che, secondo quanto abbiamo esposto sinora, non può affatto trattarsi di divisione all'infinito, ma soltanto di divisione indefinita; d'altra parte, occorre applicare tale idea non alla materia in generale, ciò che non ha forse alcun senso, ma solamente ai corpi, o alla materia corporea, se proprio si vuole parlare di «materia» nonostante l'estrema oscurità di tale nozione ed i molteplici equivoci cui dà luogo[7]. È all'estensione infatti, e non alla materia, in qualunque accezione la si intenda, che appartiene propriamente la divisibilità, e non si potrebbe confondere qui l'una con l'altra se non a condizione di adottare la concezione cartesiana, la quale fa consistere essenzialmente e unicamente la natura dei corpi nell'estensione, concezione d'altronde non ammessa neppure da Leibnitz; quindi, se ogni corpo è necessariamente divisibile, è perché esteso, non perché materiale. Ora, ricordiamolo nuovamente, essendo l'estensione qualcosa di determinato, non può essere infinita, e, pertanto, non può evidentemente implicare alcuna possibilità che sia infinita più di quanto lo è essa stessa; ma, siccome la divisibilità è una qualità inerente alla natura dell'estensione, la sua limitazione non può che provenire da questa stessa natura: finché vi è estensione, questa è sempre divisibile, cosicché si può considerare la divisibilità realmente indefinita, la sua indefinitezza essendo d'altronde condizionata da quella dell'estensione. Di conseguenza, l'estensione come tale non può essere composta da elementi indivisibili, perché questi elementi, per essere veramente indivisibili, dovrebbero essere inestesi, ed una somma di elementi inestesi non potrà mai costituire un'estensione, non più di quanto una somma di zeri possa costituire un numero; perciò, come abbiamo spiegato[8] i punti non sono elementi o parti di una linea, ed i veri elementi lineari sono sempre distanze tra punti, i quali ne costituiscono solamente le estremità. Del resto è così che lo stesso Leibnitz vedeva le cose al riguardo, e secondo lui la differenza fondamentale tra il suo metodo infinitesimale ed il «metodo degli indivisibili» di Cavalieri, sta proprio nel fatto che il primo non considera una linea come composta di punti, né una superficie come composta di linee, né un volume come composto di superfici: punti, linee e superfici sono limiti o estremità, non elementi costitutivi. È evidente infatti che dei punti, per qualunque quantità siano moltiplicati, non potrebbero mai

---

[7] Su tale argomento si veda *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit.

[8] *Le Symbolisme de la Croix*, cit., cap. XVI.

produrre una lunghezza, essendo rigorosamente nulli sotto l'aspetto della lunghezza; i veri elementi di una grandezza devono sempre essere della stessa natura di tale grandezza, sebbene incomparabilmente minori: è ciò che non accade con gli «indivisibili», e, d'altra parte, è ciò che permette di osservare nel calcolo infinitesimale una certa legge di omogeneità, la quale presuppone che le quantità ordinarie e le quantità infinitesimali dei diversi ordini, benché incomparabili tra loro, siano tuttavia grandezze della stessa specie.

Da questo punto di vista si può ancora aggiungere che la parte, quale che sia, deve sempre conservare una certa «omogeneità» o conformità di natura col tutto, almeno in quanto si consideri questo tutto come ricostituibile mediante le sue parti, tramite un procedimento paragonabile a quello occorrente alla formazione di una somma aritmetica. D'altronde ciò non significa che non vi sia alcunché di semplice nella realtà, poiché il composto può essere formato, a partire dagli elementi, in tutt'altra maniera rispetto a questa; ma allora, a dire il vero, tali elementi non sono più propriamente «parti», e, come riconosceva Leibnitz, non possono essere in alcun modo di ordine corporeo. È certo infatti che non si può giungere ad elementi semplici, ossia indivisibili, senza uscire da quella condizione speciale costituita dall'estensione, cosicché quest'ultima non può risolversi in tali elementi senza cessare di essere in quanto estensione. Da ciò consegue immediatamente che non possono esistere elementi corporei indivisibili, tale nozione implicando contraddizione; simili elementi, infatti, dovrebbero essere inestesi, e allora non sarebbero più corporei, poiché, per definizione, chi dice corporeo dice necessariamente esteso, benché la natura dei corpi non consista solo in questo; così, nonostante tutte le riserve che dobbiamo avanzare su altri punti, Leibnitz ha per lo meno interamente ragione contro l'atomismo.

Sinora abbiamo parlato però solo di divisibilità, cioè di possibilità di divisione; occorre andare oltre ed ammettere con Leibnitz una «divisione attuale»?

Neppure questa idea è esente da contraddizione, perché equivale a supporre un indefinito interamente realizzato, ed è perciò contraria alla natura stessa dell'indefinito, che, come abbiamo detto, è quella di essere una possibilità sempre in via di sviluppo, e di implicare dunque essenzialmente qualcosa d'incompiuto, di non ancora completamente realizzato. D'altronde, non vi è alcuna ragione per fare una simile supposizione, poiché, quando siamo in presenza di un insieme continuo, il tutto ci è dato, ma non le parti in cui può essere diviso, e sappiamo soltanto che ci è possibile dividerlo in parti che potranno essere rese via via più piccole, in modo da divenire minori di qualsivoglia grandezza data, purché la divisione sia spinta sufficientemente lontano; saremo noi dunque, di fatto, a realizzare 1e parti a mano a mano che effettueremo tale divisione. Così, la distinzione da noi stabilita in precedenza circa i differenti modi in cui un tutto possa essere

inteso, ci dispensa dal supporre la «divisione attuale»: un insieme continuo non è il risultato delle parti in cui è divisibile, ma ne è al contrario indipendente, e, di conseguenza, il fatto che ci sia dato come tutto non implica per nulla l'esistenza attuale di tali parti.

Parimenti possiamo dire, da un altro punto di vista e passando ad esaminare il discontinuo, che se una serie numerica indefinita ci è data, questo non implica in alcun modo che ci siano dati distintamente tutti i termini che essa comprende, ciò che costituisce un'impossibilità per il fatto stesso di essere indefinita; dare una tale serie, in realtà, significa semplicemente dare la legge che permette di calcolare il termine che occupa un posto determinato e qualsiasi nella serie[9]. Se Leibnitz avesse dato questa risposta a Bernoulli, la loro discussione sull'esistenza del «*terminus infinitesimus*» sarebbe per ciò stesso immediatamente cessata; ma non avrebbe potuto rispondere in tal maniera senza giungere logicamente a rinunciare alla sua idea della «divisione attuale», a meno di negare ogni correlazione tra il modo continuo ed il modo discontinuo della quantità.

Comunque sia, almeno per quanto concerne il continuo, è proprio nella «indistinzione» delle parti che possiamo vedere la radice dell'idea di infinito quale Leibnitz la concepisce, poiché, come abbiamo detto sopra, questa idea comporta per lui sempre una certa dose di confusione; tale «indistinzione» però, lungi dal presupporre una divisione realizzata, tenderebbe al contrario ad escluderla, persino in mancanza delle ragioni del tutto decisive che abbiamo appena indicato. Quindi, se la teoria di Leibnitz è giusta in quanto si oppone all'atomismo, occorre d'altra parte, affinché corrisponda a verità, rettificarla sostituendo la «divisione della materia all'infinito» con la «divisibilità indefinita dell'estensione»; è questo, nella sua espressione più breve e più precisa, il risultato cui conducono in definitiva tutte le considerazioni che siamo andati esponendo.

---

[9] Cfr. L. Couturat, *De l'infini mathématique*, cit., p. 467: «La serie naturale dei numeri è data per intero tramite la sua legge di formazione, come del resto ogni altra successione e serie infinita, che una formula d'induzione è in generale sufficiente a definire interamente, in maniera tale che il loro limite o la loro somma (quando esiste) si trova perciò completamente determinato... Grazie alla legge di formazione della serie naturale abbiamo l'idea di tutti i numeri interi, nel senso che essi sono dati tutti insieme in questa legge.» – Si può dire, infatti, che la formula generale esprimente l'n° termine di una serie contiene potenzialmente ed implicitamente, ma non attualmente e distintamente, tutti termini di essa, poiché se ne può estrarre uno qualunque attribuendo a n il valore corrispondente al posto che questo termine deve occupare nella serie; ma, contrariamente a quanto pensava L. Couturat, non è certamente questo che Leibnitz intendeva «quando sosteneva l'infinità attuale della serie dei numeri naturali».

IX - Indefinitamente crescente e indefinitamente decrescente

Prima di continuare l'esame delle questioni che si riferiscono propriamente al continuo, dobbiamo tornare su quanto detto sopra circa l'inesistenza di una «*fractio omnium infima*», il che ci permetterà di vedere come la correlazione o la simmetria esistente, sotto certi aspetti, tra le quantità indefinitamente crescenti e le quantità indefinitamente decrescenti sia suscettibile di essere rappresentata numericamente. Abbiamo visto che nel dominio della quantità discontinua, finché si considera solo la serie dei numeri interi, questi devono essere visti come indefinitamente crescenti a partire dall'unità, mentre non si può evidentemente parlare di un decremento indefinito, essendo l'unità essenzialmente indivisibile; se si assumessero i numeri in senso decrescente ci si dovrebbe necessariamente arrestare all'unità, cosicché la rappresentazione dell'indefinito tramite i numeri interi è limitata ad un solo senso, quello dell'indefinitamente crescente. Nel caso della quantità continua, invece, si possono prendere in esame sia quantità indefinitamente decrescenti, sia quantità indefinitamente crescenti; la stessa cosa si produce nella quantità discontinua allorché si introducono, per tradurre tale possibilità, i numeri frazionari. Si può, infatti, considerare una serie di frazioni indefinitamente decrescenti – vale a dire che, per quanto piccola sia una frazione, se ne può sempre formare una ancora più piccola –, e tale decremento non potrà mai giungere ad una «*fractio minima*», non più di quanto la crescita dei numeri interi possa giungere ad un «*numerus maximus*».

Per rendere evidente, mediante la rappresentazione numerica, la correlazione tra l'indefinitamente crescente e l'indefinitamente decrescente, basta considerare, assieme alla serie dei numeri interi, quella dei loro inversi: un numero si dice inverso di un altro quando il suo prodotto per quest'ultimo è uguale all'unità, e, per tale ragione, l'inverso del numero n è rappresentato dalla notazione $\frac{1}{n}$. Mentre la serie dei numeri interi cresce indefinitamente a partire dall'unità, la serie dei loro inversi decresce indefinitamente a partire da questa medesima unità, la quale è l'inverso di se stessa ed è così il punto di partenza comune alle due serie; a ciascun numero di una serie corrisponde un numero dell'altra e viceversa, cosicché queste due serie sono ugualmente indefinite, e lo sono esattamente allo stesso

modo, benché in senso contrario. L'inverso di un numero è evidentemente tanto più piccolo quanto più grande è tale numero, poiché il loro prodotto rimane costante; per quanto grande sia un numero N, il numero $N+1$ lo sarà ancora di più, in virtù della legge di formazione della serie indefinita dei numeri interi, e parimenti, per quanto piccolo sia un numero $\frac{1}{N}$, il numero $\frac{1}{N+1}$ lo sarà ancora di più; ciò prova chiaramente l'impossibilità del «più piccolo dei numeri», la cui nozione non è meno contraddittoria di quella del «più grande dei numeri», poiché, se non è possibile arrestarsi ad un determinato numero in senso crescente, non lo sarà neppure in senso decrescente. Del resto, poiché la correlazione rilevabile nel discontinuo numerico si presenta innanzitutto come una conseguenza dell'applicazione di tale discontinuo al continuo – come abbiamo detto a proposito dei numeri frazionari dei quali presuppone naturalmente l'introduzione –, essa non può che tradurre a suo modo, condizionata necessariamente dalla natura del numero, la correlazione esistente nel continuo stesso tra l'indefinitamente crescente e l'indefinitamente decrescente. È dunque il caso, quando si considerino le quantità continue come suscettibili di divenire tanto grandi e tanto piccole quanto si vuole – ossia più grandi e più piccole di ogni quantità determinata –, di rispettare sempre la simmetria, e, si potrebbe dire in certo qual modo, il parallelismo che mostrano queste due variazioni inverse; tale osservazione ci aiuterà in seguito a comprendere meglio la possibilità dei differenti ordini di quantità infinitesimali.

È bene sottolineare che, per quanto il simbolo $\frac{1}{n}$ evochi l'idea dei numeri frazionari, e ne tragga di fatto incontestabilmente origine, non è necessario che gli inversi dei numeri interi siano qui definiti in tal maniera, e ciò al fine di evitare l'inconveniente che presenta la notazione ordinaria dei numeri frazionari dal punto di vista propriamente aritmetico, ossia la concezione delle frazioni come «parti dell'unità». È sufficiente, infatti, considerare le due serie come costituite da numeri rispettivamente maggiori e minori dell'unità, cioè come due ordini di grandezza che hanno in essa il loro limite comune, e che al contempo possono essere visti come usciti entrambi da tale unità, la quale è veramente la fonte prima di tutti i numeri; inoltre, se si volessero vedere questi due insiemi indefiniti come una serie unica, si potrebbe dire che l'unità occupa esattamente il mezzo in questa serie di numeri, poiché, come abbiamo visto, vi sono esattamente altrettanti numeri nell'uno quanto nell'altro di tali insiemi. D'altra parte se, per generalizzare ulteriormente, anziché considerare soltanto la serie dei numeri interi e dei loro inversi, si volessero introdurre i numeri frazionari propriamente detti, nulla cambierebbe riguardo alla simmetria tra le quantità crescenti e le quantità decrescenti: si avrebbero da un lato tutti i numeri maggiori dell'unità, e, dall'altro, tutti i numeri minori di essa; anche in

questo caso, ad ogni numero $\frac{a}{b} > 1$, corrisponderebbe nell'altro gruppo un numero $\frac{b}{a} < 1$, e reciprocamente, in maniera tale che $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, come si aveva poco fa $n \times \frac{1}{n} = 1$, cosicché vi sarebbero sempre altrettanti numeri nell'uno quanto nell'altro di questi due gruppi indefiniti separati dall'unità; dev'essere d'altronde ben chiaro che, quando diciamo «altrettanti numeri», significa che vi sono due moltitudini corrispondentesi termine a termine, senza che, per questo, tali moltitudini possano in alcun modo essere ritenute «numerabili». In ogni caso, l'insieme di due numeri inversi moltiplicantesi l'uno per l'altro riproduce sempre l'unità da cui sono usciti; si può dire inoltre che l'unità, occupando il mezzo tra i due gruppi ed essendo il solo numero che possa essere considerato appartenere sia all'uno sia all'altro[1] – tanto che in realtà sarebbe più esatto dire che essa li unisca piuttosto che non li separi –, corrisponde allo stato di equilibrio perfetto e contiene in sé tutti i numeri, i quali sono da essa usciti a coppie di numeri inversi o complementari, ciascuna di queste coppie costituendo, a causa di tale complementarità, un'unità relativa nella sua indivisibile dualità[2]; ma torneremo tra poco su quest'ultima osservazione e sulle conseguenze che comporta.

Anziché dire che la serie dei numeri interi è indefinitamente crescente e quella dei loro inversi indefinitamente decrescente, si potrebbe anche dire, nel medesimo senso, che i numeri tendono da un lato verso l'indefinitamente grande e dall'altro verso l'indefinitamente piccolo, a condizione d'intendere con ciò i limiti stessi del dominio in cui si considerano questi numeri, poiché una quantità variabile non può che tendere verso un limite. Il dominio di cui si tratta è insomma quello della quantità numerica assunta in tutta l'estensione di cui è suscettibile[3]; ciò significa nuovamente che i limiti non ne sono affatto determinati da questo o quel numero particolare, per quanto grande o per quanto piccolo lo si supponga, ma dalla natura stessa del numero come tale. Proprio per questo il

---

[1] Secondo la definizione dei numeri inversi, l'unità si presenta da un lato nella forma 1 e, dall'altro, nella forma $\frac{1}{1}$, in modo tale che $1 \times \frac{1}{1} = 1$; d'altra parte, siccome $\frac{1}{1} = 1$, è la stessa unità ad essere così rappresentata sotto due forme differenti, e di conseguenza, come dicevamo sopra, essa è l'inverso di se stessa.

[2] Diciamo indivisibile perché, dal momento che esiste uno dei due numeri formanti una tale coppia, esiste per ciò stesso necessariamente anche l'altro.

[3] Va da sé che i numeri incommensurabili, sotto l'aspetto della grandezza, sono necessariamente intercalati ai numeri ordinari. interi o frazionari secondo che siano maggiori o minori dell'unità; ciò che mostra d'altronde la corrispondenza geometrica da noi indicata in precedenza, ed anche la possibilità di definire un tale numero mediante due insiemi convergenti di numeri commensurabili di cui costituisce il limite comune.

numero, come ogni altra cosa di natura determinata, esclude tutto ciò che esso non è, cosicché qui non può trattarsi affatto di infinito; d'altronde, abbiamo appena detto che l'indefinitamente grande deve necessariamente essere concepito come un limite, benché non sia in alcun modo un «*terminus ultimus*» della serie dei numeri; si può notare a questo proposito che l'espressione «tendere a infinito», impiegata frequentemente dai matematici nel senso di «crescere indefinitamente», è anch'essa un'assurdità, poiché l'infinito implica evidentemente l'assenza di ogni limite, e di conseguenza non vi è nulla verso cui sia possibile tendere. È inoltre assai singolare che certuni, pur riconoscendo la scorrettezza ed il carattere abusivo dell'espressione «tendere a infinito», non abbiano d'altra parte alcuno scrupolo ad adottare l'espressione «tendere a zero» nel senso di «decrescere indefinitamente»; sennonché zero, o la «quantità nulla», è esattamente simmetrico, rispetto alle quantità decrescenti, a ciò che è la pretesa «quantità infinita» rispetto alle quantità crescenti; ma dovremo tornare in seguito sulle questioni che si pongono più in particolare riguardo allo zero ed ai suoi differenti significati.

Poiché la serie dei numeri, nel suo insieme, non è«terminata» da un certo numero, ne consegue che non esiste numero, per quanto grande, che possa essere identificato con l'indefinitamente grande nel senso che abbiamo appena indicato; naturalmente la stessa cosa è vera altresì per quel che riguarda l'indefinitamente piccolo. Un numero può soltanto essere visto come praticamente indefinito, se è permesso esprimersi in questo modo, allorché non può più essere espresso tramite il linguaggio né rappresentato tramite la scrittura, il che, di fatto, accade inevitabilmente a un dato momento quando si considerano numeri che crescono o decrescono sempre più; questa, se si vuole, è una semplice questione di «prospettiva», in accordo però col carattere dell'indefinito, poiché quest'ultimo, in definitiva, non è altro che ciò i cui limiti possono essere non diciamo soppressi, il che sarebbe contrario alla natura stessa delle cose, ma semplicemente retrocessi sino ad essere interamente persi di vista. A tale proposito, sarebbe il caso di porsi alcune domande assai curiose: così, ci si potrebbe chiedere perché la lingua cinese rappresenti simbolicamente l'indefinito mediante il numero diecimila; l'espressione «i diecimila esseri», ad esempio, significa tutti gli esseri, i quali sono realmente in moltitudine indefinita ed «innumerabile». È notevolissimo che precisamente la stessa cosa si produca anche in greco, ove un unico vocabolo - con una semplice differenza d'accentazione che costituisce evidentemente un dettaglio del tutto accessorio, dovuto senza dubbio al bisogno di distinguere nell'uso i due significati - serve parimenti ad esprimere sia l'una sia l'altra idea: *μύριοι*, diecimila, *μυρίοι*, una indefinitezza. La vera ragione di ciò è la seguente: il numero diecimila è la quarta potenza del dieci; ora, secondo la formula del *Tao-te-ching*, «uno ha prodotto due, due ha prodotto tre, tre ha prodotto tutti i numeri», il che implica che quattro, prodotto immediatamente da tre, equivale in certo qual

modo a tutto l'insieme dei numeri, e questo perché, dal momento che si ha il quaternario, si ha pure, mediante l'addizione dei primi quattro numeri, il denario, il quale rappresenta un ciclo numerico completo: 1+2+3+4=10, che, come abbiamo già detto in altre occasioni, è la formula numerica della *Tetraktys* pitagorica. Si può ancora aggiungere che tale rappresentazione dell'indefinitezza numerica ha la sua corrispondenza nell'ordine spaziale: si sa che l'elevazione ad una potenza di un grado superiore rappresenta in quest'ordine l'aggiunta di una dimensione; ora, avendo la nostra estensione solo tre dimensioni, i suoi limiti sono superati allorché si va oltre la terza potenza, il che significa in altre parole che l'elevazione alla quarta potenza segna il termine stesso della sua indefinitezza, poiché, dal momento in cui è effettuata, si è per ciò stesso usciti da questa estensione e passati ad un altro ordine di possibilità.

X - Infinito e continuo

L'idea di infinito qual è più frequentemente intesa da Leibniz – e che è soltanto, non bisogna mai dimenticarlo, quella di una moltitudine che oltrepassa ogni numero – si presenta talvolta sotto l'aspetto di un «infinito discontinuo», come nel caso delle serie numeriche dette infinite; ma il suo aspetto più abituale, nonché il più importante per quanto concerne il significato del calcolo infinitesimale, è quello dell'«infinito continuo». In proposito conviene ricordare che quando Leibniz – all'inizio delle ricerche che dovevano condurlo, almeno secondo quanto dice egli stesso, alla scoperta del suo metodo - operava su delle serie di numeri, non doveva considerare che differenze finite nel senso ordinario del termine; le differenze infinitesimali gli si presentarono solo allorché si trattò di applicare il discontinuo numerico al continuo spaziale. L'introduzione dei differenziali si giustificava così tramite l'osservazione di una certa analogia tra le variazioni rispettive di questi due modi della quantità; ma il loro carattere infinitesimale proveniva dalla continuità delle grandezze cui essi dovevano applicarsi, cosicché la considerazione degli «infinitamente piccoli» si trovava, per Leibniz, strettamente connessa alla questione della «composizione del continuo».

Intesi «a rigore» gli «infinitamente piccoli» sarebbero, come pensava Bernoulli, «*partes minimae*» del continuo; ma quest'ultimo, finché esiste come tale, è sempre divisibile, e di conseguenza non può avere «*partes minimae*». Gli «indivisibili» non costituiscono neppure parti di ciò rispetto al quale sono indivisibili, ed il «*minimum*» si può qui concepire solo come limite o estremità, non come elemento: «La linea non è soltanto minore di qualsivoglia superficie – dice Leibniz – essa non è neppure una parte della superficie, ma solamente un *minimum* o una estremità»[1]; l'assimilazione tra *extremum* e *minimum*, è qui giustificabile, dal suo punto di vista, mediante la «legge di continuità», in quanto quest'ultima consentirebbe secondo lui, come vedremo più avanti, il «passaggio al limite». Lo stesso vale, come già abbiamo detto, per quel che riguarda il punto in rapporto alla linea, nonché per la superficie in rapporto al volume; gli elementi infinitesimali, invece, devono essere parti del continuo, altrimenti non sarebbero neppure quantità;

---

[1] *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica Mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficillioribus substituendas*, in «Acta Eruditorum», Leipzig, 1686.

ma possono esserlo solo a condizione di non costituire davvero degli «infinitamente piccoli», poiché questi ultimi non sarebbero altro che quelle «*partes minimae*» o quegli «elementi ultimi» la cui esistenza rispetto al continuo implica contraddizione. Così, la composizione del continuo non permette che gli infinitamente piccoli siano più che semplici finzioni; d'altra parte, è proprio l'esistenza di tale continuo a far sì che esse siano, almeno agli occhi di Leibnitz, «finzioni ben fondate»: se «tutto si fa in geometria come se fossero perfette realtà» è perché l'estensione, oggetto della geometria, è continua; se lo stesso accade in natura, è perché i corpi sono anch'essi continui, e perché vi è pure continuità in tutti i fenomeni quali il moto, di cui i corpi sono la sede, e che costituiscono l'oggetto della meccanica e della fisica. D'altronde, se i corpi sono continui è perché sono estesi, e partecipano dunque della natura dell'estensione; parimenti, la continuità del moto e dei diversi fenomeni ad esso più o meno direttamente riconducibili proviene essenzialmente dal loro carattere spaziale. È insomma la continuità dell'estensione il vero fondamento di tutte le altre continuità rilevabili nella natura corporea; ed è d'altronde per questo che, introducendo al riguardo una distinzione essenziale non operata da Leibnitz, abbiamo precisato come la proprietà di «divisibilità indefinita» debba essere attribuita in realtà non alla «materia» in quanto tale, bensì all'estensione.

Non è necessario esaminare qui la questione delle altre forme possibili di continuità, indipendenti da quella spaziale; occorre sempre ricondursi a quest'ultima, infatti, quando si considerano delle grandezze, essa è quindi sufficiente per tutto ciò che si riferisce alle quantità infinitesimali. Dobbiamo tuttavia aggiungervi la continuità del tempo, poiché, contrariamente alla strana opinione di Cartesio in proposito, il tempo è realmente continuo in sé, e non solo nella rappresentazione spaziale tramite il moto che serve a misurarlo[2]. A tale riguardo si potrebbe dire che il moto è in qualche modo doppiamente continuo, sia per la sua condizione spaziale, sia per la sua condizione temporale; questa sorta di combinazione tra il tempo e lo spazio, da cui risulta il moto, non sarebbe possibile se l'uno fosse discontinuo e l'altro continuo. Questa osservazione permette inoltre di introdurre la continuità in certe categorie di fenomeni naturali che si rapportano più direttamente al tempo che allo spazio, sebbene si compiano sia nell'uno sia nell'altro, come ad esempio il processo di un qualunque sviluppo organico. Sulla composizione del continuo temporale si potrebbe d'altronde ripetere ciò che abbiamo detto circa il continuo spaziale, e, in virtù di quella sorta di simmetria esistente sotto certi aspetti tra lo spazio ed il tempo, come abbiamo spiegato altrove, si giungerebbe a conclusioni del tutto analoghe: gli istanti, concepiti come indivisibili, non sono parti della durata, non più di quanto lo siano i punti rispetto all'estensione, come lo stesso Leibnitz riconosceva, e del resto anche questa era una tesi del tutto

[2] Cfr. *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. V.

corrente presso gli scolastici; tale è insomma il carattere generale di ogni continuo, la cui natura non comporta l'esistenza di «elementi ultimi».

Quanto abbiamo detto sinora mostra a sufficienza in che senso si possa intendere che, dal punto di vista in cui si pone Leibnitz, il continuo avviluppa necessariamente l'infinito; non possiamo però ammettere, beninteso, né che si tratti di una «infinità attuale», come se tutte le parti possibili fossero date effettivamente allorché il tutto è dato, né che si tratti d'altronde di un vero infinito, il quale è escluso da qualsiasi determinazione e non può di conseguenza essere implicato in alcuna cosa particolare. Sennonché, qui come in tutti i casi in cui si presenti l'idea di un preteso infinito, differente dal vero Infinito metafisico – casi che tuttavia in se stessi rappresentano qualcosa di più che pure e semplici assurdità –, scompare ogni contraddizione e con essa ogni difficoltà logica qualora si sostituisca il cosiddetto infinito con l'indefinito, e si dica semplicemente che ogni continuo avviluppa una certa indefinitezza quando lo si consideri in rapporto ai suoi elementi. Certuni invece, avendo mancato di operare la distinzione fondamentale tra l'infinito e l'indefinito, hanno creduto a torto che non fosse possibile sfuggire alla contraddizione di un infinito determinato, se non respingendo in modo assoluto il continuo e sostituendolo col discontinuo; così in particolare Renouvier, il quale nega con ragione l'infinito matematico, ma al quale l'idea dell'infinito metafisico è totalmente estranea, si è sentito in obbligo, per la logica del suo «finitismo», di giungere sino ad ammettere l'atomismo, cadendo così in un'altra concezione che, come abbiamo visto in precedenza, non è meno contraddittoria di quella che voleva evitare.

XI - La «legge di continuità»

Dal momento che il continuo esiste possiamo dire con Leibnitz che vi è continuità in natura o, se si vuole, che dev'esserci una certa «legge di continuità» applicabile a tutto quel che presenta i caratteri del continuo; questo è insomma evidente, ma non ne consegue affatto che una simile legge debba potersi applicare a tutto come egli pretende, poiché, se vi è del continuo, vi è pure del discontinuo, e ciò nel dominio stesso della quantità[1]: il numero, infatti, è essenzialmente discontinuo, ed è appunto la quantità discontinua, non la quantità continua, a costituire realmente, come abbiamo detto altrove, il modo primo e fondamentale della quantità, o quel che si potrebbe chiamare propriamente la quantità pura[2]. D'altra parte, nulla permette di supporre *a priori* che, al di fuori della quantità, possa essere considerata dovunque una continuità qualsiasi, ed anzi, a dire il vero, sarebbe stupefacente che solo il numero, tra tutte le cose possibili, avesse la proprietà di essere essenzialmente discontinuo; ma non è nostra intenzione ricercare qui entro quali limiti una «legge di continuità» sia realmente applicabile, e quali restrizioni converrebbe apportarvi per tutto ciò che oltrepassa il dominio della quantità intesa nel senso più generale. Ci limiteremo a fornire, per quanto concerne i fenomeni naturali, un esempio semplicissimo di discontinuità: se per rompere una corda è necessaria una certa forza, applicando a tale corda una forza la cui intensità sia minore di quella richiesta non si otterrà una rottura parziale, ossia la rottura di una parte dei fili di cui è composta, ma solamente una tensione, cosa del tutto diversa; se si aumenta la forza in maniera continua, anche la tensione crescerà all'inizio in maniera continua, ma giungerà un momento in cui si produrrà la rottura, e si avrà allora in modo improvviso e pressoché istantaneo, un effetto di tutt'altra natura rispetto al precedente, il che implica

---

[1] Cfr. L. Couturat, *De l'infini mathématique*, cit., p. 140: «In generale, il principio di continuità non trova posto in algebra, e non può essere invocato per giustificare la generalizzazione algebrica del numero. Non solo la continuità non è affatto necessaria alle speculazioni dell'aritmetica generale, ma inoltre essa ripugna allo spirito di tale scienza ed alla natura stessa del numero. Il numero è infatti essenzialmente discontinuo, come pressoché tutte le sue proprietà aritmetiche… Non si può quindi imporre la continuità alle funzioni algebriche per complicate che siano, poiché il numero intero, il quale ne fornisce tutti gli elementi, è discontinuo e "salta" in qualche modo da un valore all'altro senza transizione possibile.»

[2] Si veda *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. II.

chiaramente una discontinuità; così, non è vero il dire – in termini del tutto generali e senza restrizioni di sorta – che «*natura non facit saltus*».

Comunque sia, è in ogni caso sufficiente che le grandezze geometriche siano continue, come infatti sono, perché vi si possano sempre assumere elementi piccoli quanto si vuole, in grado dunque di divenire più piccoli di ogni grandezza assegnabile; e, come dice Leibnitz, «consiste senza dubbio in ciò la dimostrazione rigorosa del calcolo infinitesimale», che si applica precisamente a tali grandezze geometriche. La «legge di continuità» può dunque costituire il «*fundamentum in re*» di finzioni quali le quantità infinitesimali – come d'altronde di altre finzioni quali le radici immaginarie, dato che Leibnitz opera un accostamento tra le une e le altre sotto tale aspetto –, senza che si debba per questo vedere in essa, come forse avrebbe voluto, «la pietra di paragone di ogni verità»[3]. D'altra pane, se si ammette una «legge di continuità», pur introducendo certe restrizioni circa la sua portata, e pur riconoscendo che questa legge possa servire a giustificare le basi del calcolo infinitesimale, «*modo sano sensu intelligantur*», non ne consegue affatto che si debba concepirla esattamente alla maniera di Leibnitz, né accettarne tutte le conseguenze che egli stesso aveva la pretesa di trarne; è tale concezione e tali conseguenze che dobbiamo ora esaminare un po' più da vicino.

Nella sua forma più generale questa legge, enunciata da Leibnitz a più riprese in termini differenti ma il cui senso è in fondo sempre lo stesso, significa insomma questo: dal momento che vi è un certo ordine nei principi, qui intesi nel senso relativo di dati assunti come punto di partenza, deve sempre esservi un ordine corrispondente nelle conseguenze che se ne trarranno. Si tratta allora, come abbiano già indicato, di un caso particolare della «legge di giustizia», ovverosia d'ordine, la quale postula l'«intelligibilità universale»; in fondo ciò costituisce, per Leibnitz, una conseguenza o un'applicazione del «principio di ragion sufficiente», se non questo principio stesso in quanto si applichi più specialmente alle combinazioni ed alle variazioni della quantità: «la continuità è una cosa ideale», egli dice, il che d'altronde è lungi dall'essere chiaro come sarebbe auspicabile, ma «il reale non cessa di governarsi mediante l'ideale e l'astratto,… perché tutto si governa secondo ragione»[4]. Vi è sicuramente un certo ordine nelle cose, e questo non è in discussione, ma si può concepire tale ordine in tutt'altro modo rispetto a Leibnitz, le cui idee al riguardo erano sempre influenzate più o meno direttamente dal suo preteso «principio del migliore», il quale perde ogni significato non appena si sia compresa l'identità metafisica tra possibile e reale[5]; inoltre, benché egli fosse un avversario dichiarato dell'angusto razionalismo cartesiano, si potrebbe

[3] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, cit., p. 266.

[4] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

[5] Si veda *Les États multiples de l'être*, cit., cap. II.

rimproverargli, quanto alla sua concezione della «intelligibilità universale», di aver confuso troppo facilmente «intelligibile» con «razionale»; ma non insisteremo oltre su queste considerazioni di ordine generale, perché ci allontanerebbero troppo dal nostro argomento. Aggiungeremo soltanto, a tale proposito, che è permesso di stupirsi se, dopo aver affermato che «non occorre far dipendere l'analisi matematica dalle controversie metafisiche» – cosa del tutto contestabile, poiché significa farne, secondo il punto di vista puramente profano, una scienza totalmente ignorante dei propri principi, e del resto solo l'incomprensione può far nascere controversie nel dominio metafisico –, Leibnitz giunga infine ad invocare, a sostegno della sua «legge di causalità» cui ricollega la stessa analisi matematica, un argomento in effetti non più metafisico, bensì teologico, il quale potrebbe prestarsi a ben altre controversie: «È perché tutto si governa secondo ragione – egli dice – e perché altrimenti non vi sarebbe né scienza né regola, ciò che non sarebbe conforme alla natura del sovrano principio»[6]; al che si potrebbe rispondere che la ragione è in realtà solo una facoltà puramente umana e di ordine individuale, e che, pur senza risalire sino al «sovrano principio», l'intelligenza intesa in senso universale – ossia l'intelletto puro e trascendente – è tutt'altra cosa dalla ragione e non può esserle assimilata in alcun modo, cosicché, se è vero che non vi è nulla di «irrazionale», è altrettanto vero che vi sono molte cose «sovra-razionali», d'altronde non per questo meno «intelligibili».

Passiamo ora ad un'altro enunciato più preciso della la «legge di continuità», enunciato che si riferisce in modo più diretto del precedente ai principi del calcolo infinitesimale: «Se, nei dati, un caso si avvicina in maniera continua ad un altro e svanisce infine in esso, occorre necessariamente che anche i risultati di tali casi si avvicinino in maniera continua nelle soluzioni cercate, e terminino infine reciprocamente l'uno nell'altro»[7]. Vi sono qui due cose che è importante distinguere: intanto, se la differenza tra due casi diminuisce sino a divenire minore di qualunque grandezza assegnabile «*in datis*», lo stesso deve accadere «*in quaesitis*»; non si tratta insomma che dell'applicazione dell'enunciato più generale, e non è questa parte della legge che è suscettibile di sollevare obiezioni, giacché si ammette l'esistenza delle variazioni continue, ed è appunto al dominio in cui si effettuano tali variazioni, ossia al dominio geometrico, che si riferisce propriamente il calcolo infinitesimale; ma si deve inoltre

---

[6] Lettera a Varignon, cit. – La prima esposizione della «legge di continuità» comparve in «Nouvelles de la République des Lettres», nel giugno del 1687, sotto questo titolo assai significativo dallo stesso punto di vista: *Principium quoddam generale non in Mathematicis tantum sed ed Physicis utile, cujus ope ex consideratione Sapientiæ Divinæ examinantur Naturæ Leges, qua occasione nata cum R.P. Mallebranchio controversia explicatur, et quidam Cartesianorum errores notantur*.

[7] *Specimen Dynamicum pro admirandis Naturæ Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis*, 1695, parte II.

ammettere che «*casus in casum tandem evanescat*», e di conseguenza «*eventus casuum tandem in se invicem desinant*»? In altri termini, la differenza tra i due casi, in seguito alla sua diminuzione continua e indefinita, diverrà mai rigorosamente nulla, o, se si preferisce, tale diminuzione, sebbene indefinita, raggiungerà il suo termine? La questione in fondo consiste nel sapere se, in una variazione continua, il limite possa essere raggiunto; su questo punto facciamo innanzi tutto notare che, siccome l'indefinito, qual è implicato nel continuo, comporta sempre in un certo senso qualcosa di «inesauribile», e siccome Leibnitz non ammette d'altra parte che la divisione del continuo possa giungere ad un termine finale – e neppure che tale termine esista veramente –, è forse perfettamente logico e coerente da parte sua ammettere al contempo che una variazione continua, la quale si effettua «*per infinitos gradus intermedios*»[8], possa raggiungere il suo limite? Questo sicuramente non significa che il limite non possa essere raggiunto in alcun modo, ciò che ridurrebbe il calcolo infinitesimale a non poter essere altro che un semplice metodo d'approssimazione; ma, se esso è effettivamente raggiunto, non può esserlo nella variazione continua, né come ultimo termine della serie indefinita dei «*gradus mutationis*». Eppure è mediante la «legge di continuità» che Leibnitz pretende di giustificare il «passaggio al limite», il che non costituisce la minore tra le difficoltà cui il suo metodo dà luogo dal punto di vista logico, ed è proprio qui che le sue conclusioni divengono del tutto inaccettabili; ma, affinché tale aspetto della questione possa essere interamente compreso, dobbiamo cominciare col precisare la stessa nozione matematica di limite.

[8] Lettera a Schulenburg, 29 marzo 1698.

XII - La nozione di limite

La nozione di limite è tra le più importanti che dovremo esaminare, perché da essa dipende tutto il valore del calcolo infinitesimale quanto a rigore; si è persino giunti ad affermare che, in definitiva, «tutto l'algoritmo infinitesimale poggia sulla sola nozione di limite, poiché proprio tale nozione rigorosa serve a definire ed a giustificare tutti i simboli e tutte le formule del calcolo infinitesimale»[1]. L'oggetto di questo calcolo, infatti, «si riduce a calcolare i limiti di rapporti ed i limiti di somme, ossia a trovare i valori fissi verso cui convergono rapporti o somme di quantità variabili via via che queste ultime decrescono indefinitamente secondo una legge data»[2]. Con maggior precisione diremo che, delle due branche in cui si divide il calcolo infinitesimale, il calcolo differenziale consiste nel calcolare i limiti di rapporti i cui due termini decrescono simultaneamente ed indefinitamente secondo una certa legge, in maniera tale che il rapporto stesso mantenga sempre un valore finito e determinato; il calcolo integrale consiste invece nel calcolare i limiti di somme di elementi la cui moltitudine cresce indefinitamente mentre il valore di ciascuno di essi decresce indefinitamente, essendo necessario che queste due condizioni siano riunite affinché la somma stessa permanga sempre una quantità finita e determinata. Ciò posto si può dire, in generale, che il limite di una quantità variabile è un'altra quantità considerata fissa ed a cui la quantità variabile si suppone avvicinarsi – mediante i valori assunti successivamente nel corso della sua variazione – sino a differirne poco quanto si voglia, o, in altri termini, finché la differenza tra queste due quantità divenga minore di ogni quantità assegnabile. Il punto su cui dobbiamo insistere in modo particolare, per ragioni che saranno meglio comprese in seguito, è che il limite è concepito essenzialmente come una quantità fissa e determinata; quand'anche non fosse dato dalle condizioni del problema, si dovrà in ogni caso cominciare col supporlo di un valore determinato e continuare a considerarlo fisso sino alla fine del calcolo.

Una cosa è però la concezione del limite in sé, un'altra la giustificazione logica del «passaggio al limite»; Leibnitz riteneva che «quanto giustifica in generale tale "passaggio al limite", è che la medesima relazione che esiste tra più grandezze variabili sussiste tra i loro limiti fissi,

---

[1] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, cit., p. xxiii.

[2] Ch. de Freycinet, *De L'Analyse infinitésimale*, cit., p. viii.

quando le loro variazioni sono continue, perché allora esse raggiungono in effetti i loro limiti rispettivi; è questo un altro enunciato del principio di continuità»[3]. Sennonché, tutta la questione consiste appunto nel sapere se la quantità variabile, nell'avvicinarsi indefinitamente al suo limite fisso - e di conseguenza, secondo la definizione di limite, differendone poco quanto si voglia -, possa raggiungere effettivamente il limite in ragione della sua stessa variazione, vale a dire se il limite possa essere concepito come l'ultimo termine di una variazione continua. Vedremo come in realtà questa soluzione sia inaccettabile; per ora diremo soltanto, salvo tornarvi più avanti, che la vera nozione di continuità non permette di ritenere le quantità infinitesimali in grado di divenire uguali a zero, perché allora cesserebbero di essere quantità; ora, per lo stesso Leibnitz, esse devono sempre conservare il carattere di vere quantità, e ciò anche qualora le si consideri «evanescenti». Una differenza infinitesimale, quindi, non potrà mai essere rigorosamente nulla; di conseguenza una variabile, finché sarà vista come tale, in realtà differirà sempre dal suo limite, e non potrà raggiungerlo senza perdere per ciò stesso il suo carattere di variabile.

Su questo punto possiamo dunque accettare interamente, salvo una leggera riserva, le considerazioni che un matematico da noi già citato espone in questi termini: «Ciò che caratterizza il limite quale l'abbiamo definito, è sia che la variabile possa avvicinarsene quanto si vuole, sia che non possa mai raggiungerlo rigorosamente; occorrerebbe infatti, affinché lo raggiungesse effettivamente, la realizzazione di una certa infinità, che ci è necessariamente preclusa… Ci si deve pertanto attenere all'idea di un'approssimazione indefinita, ossia sempre maggiore»[4]. Anziché parlare della «realizzazione di una certa infinità», cosa per noi priva di senso, diremo semplicemente che occorrerebbe che una certa indefinitezza fosse esaurita in ciò che ha appunto di inesauribile, mentre le possibilità di sviluppo che tale indefinitezza comporta permettono di ottenere un'approssimazione grande quanto si vuole, «*ut error fiat minor dato*», secondo l'espressione di Leibnitz, per il quale «il metodo è sicuro» dal momento che tale risultato è raggiunto. «Ciò che è proprio del limite e fa sì che la variabile non lo raggiunga mai esattamente, è di avere una definizione diversa rispetto a quella di variabile; e la variabile, da parte sua, pur avvicinandosi sempre di più al limite, non lo raggiunge mai, poiché essa non deve mai cessare di soddisfare la sua definizione originaria la quale, diciamo, è differente. La distinzione necessaria tra le due definizioni di limite e di variabile si ritrova dappertutto... Il fatto che le due definizioni siano logicamente distinte e tali tuttavia che gli oggetti definiti possano

[3] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, cit., p. 268, nota. – Tale punto di vista è esposto segnatamente in *Justification du Calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire*.

[4] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, cit., p. 18.

avvicinarsi sempre più l'uno all'altro[5], dà conto di quanto sembrava esservi di strano di primo acchito ossia l'impossibilità di far coincidere due quantità di cui d'altronde si è padroni di far diminuire la differenza al di là di ogni espressione»[6].

È appena il caso di osservare che, in virtù della tendenza moderna a ridurre tutto esclusivamente al quantitativo, non si è mancato di rimproverare a questa concezione del limite di introdurre una differenza qualitativa nella scienza stessa della quantità; ma, se la si dovesse scartare per tale ragione, occorrerebbe pure che la geometria si interdisse completamente, tra le altre cose, la considerazione della similitudine, anch'essa puramente qualitativa, come abbiamo già spiegato altrove, poiché concerne solo la forma delle figure facendo astrazione dalla loro grandezza, quindi da ogni elemento propriamente quantitativo. D'altronde è bene sottolineare, a tale proposito, che uno dei principali impieghi del calcolo differenziale consiste nel determinare la direzione delle tangenti in ciascun punto di una curva, direzioni il cui insieme definisce la forma stessa della curva, direzione e forma essendo appunto, nell'ordine spaziale, elementi il cui carattere è essenzialmente qualitativo[7]. Inoltre, non è una soluzione pretendere di sopprimere puramente e semplicemente il «passaggio al limite» col pretesto che il matematico può esimersi dal passarvi effettivamente, e che questo non gli impedirà di condurre il suo calcolo fino in fondo; ciò può essere vero, ma quel che importa è: in tali condizioni, fino a che punto si avrà il diritto di ritenere il calcolo fondato su un ragionamento rigoroso, e, anche se così il «metodo è sicuro», non lo sarà solamente in quanto metodo d'approssimazione? Si potrebbe obiettare come la concezione da noi esposta renda allora impossibile il «passaggio al limite», tale limite avendo per carattere precisamente quello di non poter essere raggiunto; in un certo senso questo è vero, ma soltanto finché si considerano le quantità variabili come tali, poiché non abbiamo detto che il limite non potesse essere raggiunto in alcun modo, ma – ed è essenziale precisarlo bene – che non poteva esserlo nella variazione e come termine di essa. Di veramente impossibile vi è solo la concezione del «passaggio al limite» come compimento di una variazione continua; ad essa dobbiamo quindi sostituire un'altra concezione, ed è ciò che faremo più esplicitamente in seguito.

---

[5] Sarebbe più esatto dire che uno di essi può avvicinarsi sempre più all'altro, in quanto uno solo di tali oggetti è variabile, mentre l'altro è essenzialmente fisso, cosicché, in ragione della definizione stessa di limite, il loro avvicinamento non può affatto costituire una relazione reciproca i cui due termini sarebbero in qualche modo intercambiabili; tale irreciprocità implica d'altronde che la loro differenza è di ordine propriamente qualitativo.

[6] *Ibid.*, p 19.

[7] Si veda *Le Règne de la Quantité les Signes des Temps*, cit., cap. IV.

XIII - Continuità e passaggio al limite

Possiamo ora tornare all'esame della «legge di continuità», o, più esattamente, dell'aspetto di questa legge che abbiamo momentaneamente tralasciato, quello cioè tramite il quale Leibnitz crede di poter giustificare il «passaggio al limite», poiché, secondo lui, da esso consegue «che, nelle quantità continue, il caso estremo esclusivo può essere trattato come inclusivo, cosicché quest'ultimo caso, benché di natura del tutto differente, è come contenuto allo stato latente nella legge generale degli altri casi»[1]. Benché egli non sembri accorgersene, proprio in ciò risiede il principale difetto logico della sua concezione della continuità, com'è facile rendersi conto dalle conseguenze che ne trae e dalle applicazioni che ne fa; eccone infatti qualche esempio: «in virtù della mia legge di continuità è permesso considerare la quiete un moto infinitamente piccolo, vale a dire equivalente ad una specie del suo contraddittorio, e la coincidenza una distanza infinitamente piccola, e l'uguaglianza l'ultima delle disuguaglianze, ecc.»[2]. E ancora: «In accordo con questa legge di continuità, che esclude ogni salto nel cambiamento, il caso della quiete può essere visto come un caso speciale di moto, ovvero come un moto evanescente o minimo, e il caso dell'uguaglianza come un caso di disuguaglianza evanescente. Ne consegue che le leggi del moto devono essere stabilite in maniera tale che non vi sia bisogno di regole particolari per i corpi in equilibrio ed in quiete, ma che queste ultime nascano di per sé dalle regole concernenti i corpi in squilibrio ed in moto; o, se si vogliono enunciare regole particolari per la quiete e l'equilibrio, occorre prestare attenzione che non siano tali da non potersi accordare con l'ipotesi che considera la quiete un moto nascente o l'uguaglianza l'ultima disuguaglianza»[3]. Su tale argomento aggiungiamo ancora quest'ultima citazione, in cui troviamo un nuovo esempio di un genere un po' diverso dai precedenti, ma non meno contestabile dal punto di vista logico: «Quantunque non sia affatto vero a rigore che la quiete sia una specie di moto, o che l'uguaglianza sia una specie di disuguaglianza, come non è affatto vero che il cerchio sia una specie di poligono regolare, nondimeno si può dire che la quiete, l'uguaglianza ed il cerchio concludano

---

[1] *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa Scientia infiniti*, in «Acta Eruditorum», Leipzig, 1713.

[2] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

[3] *Specimen Dynamicum*, cit.

i moti, le disuguaglianze ed i poligoni regolari, che tramite un cambiamento continuativo vi giungono svanendo. E quantunque tali conclusioni siano esclusive, ossia non comprese a rigore nelle varietà che esse limitano, nondimeno ne possiedono le proprietà, come se vi fossero comprese, secondo il linguaggio degli infiniti o infinitesimali, che considera il cerchio, ad esempio, un poligono regolare il cui numero di lati è infinito, Altrimenti la legge di continuità sarebbe violata, ovverosia, poiché si passa dai poligoni al cerchio tramite un cambiamento continuativo e senza fare salti, occorre pure che non si faccia alcun salto nel passaggio dalle affezioni dei poligoni a quelle del cerchio»[4].

Va detto che Leibnitz, come indicato del resto all'inizio dell'ultimo passo appena citato, considera tali asserzioni del genere di quelle solo «*toleranter verae*», che, dice d'altra parte, «servono soprattutto all'arte d'inventare, benché, a mio giudizio, racchiudano qualcosa di fittizio e di immaginario, che può tuttavia essere facilmente rettificato mediante la riduzione alle espressioni ordinarie, affinché l'errore non possa prodursi»[5]; ma è davvero così, o in realtà esse non racchiudono piuttosto che pure e semplici contraddizioni? Senza dubbio Leibnitz riconosce che il caso estremo, o «*ultimus casus*», è «*esclusivus*», il che presuppone manifestamente che si trovi al di fuori della serie dei casi che rientrano naturalmente nella legge generale; ma allora con quale diritto lo si può far rientrare ciononostante in questa legge e trattarlo «*ut inclusivum*», come se fosse cioè un semplice caso particolare compreso in tale serie? È vero che il cerchio è il limite di un poligono regolare il cui numero di lati cresce indefinitamente, ma la sua definizione è essenzialmente diversa da quella dei poligoni; e si vede molto chiaramente, da un esempio come questo, la differenza qualitativa che esiste, come abbiamo detto, tra il limite stesso e ciò di cui costituisce il limite. La quiete non è affatto un caso particolare di moto, né l'uguaglianza un caso particolare di disuguaglianza, né la coincidenza un caso particolare di distanza, né il parallelismo un caso particolare di convergenza; Leibnitz d'altronde non ammette che lo siano in senso rigoroso, ma sostiene nondimeno che possano essere in qualche maniera ritenuti tali, cosicché «il genere si conclude nella quasi-specie opposta»[6], ed un qualcosa possa essere «equivalente ad una specie del suo

---

[4] *Justification da Calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire*, cit., nota annessa alla lettera di Varignon a Leibnitz del 23 maggio 1702, nella quale essa è menzionata come inviata da Leibnitz per essere inserita nel «Journal de Trévoux». – Leibnitz assume il termine «continuativo» nel senso di «continuo».

[5] *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium*, cit.

[6] *Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica*, 1714 [trad. it. «Gli inizi metafisici della matematica», *Scritti filosofici*, vol. III, UTET, Torino 2000] - Leibnitz dice testualmente: «*genus in quasi-speciem oppositam desinit*», e l'impiego di questa singolare espressione «*quasi-species*», per dare un'apparenza di plausibilità ad un simile enunciato, sembra indicare per lo meno un certo imbarazzo.

contraddittorio». Ciò appartiene del resto, notiamolo di sfuggita, allo stesso ordine di idee che parrebbe ricollegarsi alla nozione di «virtualità», concepita da Leibnitz, nel senso speciale che ad essa attribuisce, come una potenza che sarebbe un atto che comincia[7], il che non è meno contraddittorio degli altri esempi da noi citati.

Da qualunque punto di vista si esaminino le cose, non si vede minimamente come una certa specie possa essere un «caso limite» della specie o del genere opposto, non essendo questo il senso in cui gli opposti si limitano reciprocamente, ma, ben al contrario, quello in cui si escludono, ed è impossibile che dei contrari siano riducibili l'uno all'altro; e d'altronde la disuguaglianza, ad esempio, può mantenere un significato se non in quanto si oppone all'uguaglianza e ne costituisce la negazione? Non possiamo neppure dire che tali asserzioni siano «*toleranter verae*»; persino se non si ammettesse l'esistenza di generi assolutamente separati, non sarebbe men vero che un genere qualunque, definito come tale, non può mai divenire parte integrante di un altro genere ugualmente definito e la cui definizione non includa la propria, quando non la escluda formalmente come nel caso dei contrari; inoltre, se una comunicazione può stabilirsi tra generi differenti, essa non può avvenire tramite ciò per cui differiscono effettivamente, ma solo mediante un genere superiore nel quale rientrino entrambi. Una siffatta concezione della continuità, che giunge a sopprimere non solo ogni separazione ma persino ogni distinzione effettiva, permettendo il passaggio diretto da un genere ad un altro senza riduzione ad un genere superiore o più generale, è propriamente la negazione stessa di ogni principio veramente logico; da qui all'affermazione hegeliana della «identità degli opposti» non vi è che un passo, poco difficile da compiere.

---

[7] I termini atto» e «potenza», beninteso, sono qui assunti nel loro significato aristotelico e scolastico.

XIV - Le «quantità evanescenti»

La giustificazione del «passaggio al limite» consiste insomma, per Leibnitz, nel fatto che il caso particolare delle «quantità evanescenti», come egli dice, in virtù della continuità deve rientrare in un certo senso nella regola generale; d'altronde tali quantità evanescenti non possono essere viste come «nulla assoluti» o come puri zeri, poiché, sempre in ragione della continuità, mantengono tra loro un rapporto determinato, e generalmente diverso dall'unità, nell'istante stesso in cui svaniscono, il che presuppone che siano ancora vere quantità, sebbene «inassegnabili» rispetto alle quantità ordinarie[1]. Tuttavia, se le quantità evanescenti, o, il che è lo stesso, le quantità infinitesimali, non sono «nulla assoluti» – e ciò anche nel caso dei differenziali di ordini superiori al primo –, devono essere considerate «nulla relativi», vale a dire che, pur conservando il carattere di vere quantità, possono ed anzi devono essere trascurate rispetto alle quantità ordinarie, con le quali sono «incomparabili»[2]; ma, moltiplicate per quantità «infinite» o incomparabilmente più grandi delle quantità ordinarie, esse producono di nuovo quantità ordinarie, il che non potrebbe accadere se fossero assolutamente nulle. Si può notare, in base alle definizioni da noi date in precedenza, che lo studio del rapporto tra le quantità evanescenti, che permane determinato, si riferisce al calcolo differenziale, mentre quello della moltiplicazione di queste medesime quantità evanescenti per quantità «infinite», che produce quantità ordinarie, si riferisce al calcolo integrale. La difficoltà, in tutto questo, consiste nell'ammettere che quantità non affatto nulle debbano tuttavia essere trattate come tali nel calcolo, il che rischia di dare l'impressione che in ciò non vi sia che una semplice approssimazione; anche a questo proposito, Leibnitz sembra talvolta invocare, come unico

---

[1] Secondo Leibnitz $\frac{0}{0}=1$, poiché, egli dice, «un nulla vale l'altro»; d'altra parte, siccome si ha $0 \times n = 0$, qualunque sia *n*, è evidente che si può anche scrivere $\frac{0}{0}=n$, ed è per questo che l'espressione $\frac{0}{0}$ è generalmente considerata rappresentare quel che si dice una «forma indeterminata».

[2] La differenza tra questo ed il paragone del granello di sabbia sta nel fatto che, giacché si parla di «quantità evanescenti», ciò presuppone necessariamente che si tratti di quantità variabili e non più di quantità fisse e determinate, per piccole che le si supponga.

postulato richiesto dal suo metodo, la «legge di continuità», secondo la quale il «caso limite» si trova ricondotto alla regola generale; tale argomento è però ben poco chiaro, e occorre tornare piuttosto alla nozione di «incomparabili», come del resto egli fa più frequentemente, per giustificare l'eliminazione delle quantità infinitesimali dai risultati del calcolo.

Leibnitz considera in effetti uguali non solo le quantità la cui differenza sia nulla, ma anche quelle la cui differenza sia incomparabile con queste stesse quantità; è su tale nozione di «incomparabili» che si fonda secondo lui non solo l'eliminazione delle quantità infinitesimali – che scompaiono così rispetto alle quantità ordinarie –. ma anche la distinzione tra i differenti ordini di quantità infinitesimali o di differenziali, le quantità di ciascuno di tali ordini essendo incomparabili con quelle del precedente, come quelle del primo ordine lo sono con le quantità ordinarie, ma senza che si giunga mai a «nulla assoluti». «Chiamo grandezze incomparabili – dice Leibnitz – quelle di cui l'una, moltiplicata per qualsiasi numero finito, non può superare l'altra, allo stesso modo assunto da Euclide nella sua quinta definizione del quinto libro»[3]. Non vi è qui d'altronde nulla che indichi se tale definizione si riferisca a quantità fisse e determinate o a quantità variabili; ma si può ammettere, in tutta la sua generalità, che debba potersi applicare indistintamente ad entrambi i casi: tutta la questione consisterebbe allora nel sapere se due quantità fisse, per quanto differenti siano nella scala delle grandezze, possano essere ritenute realmente «incomparabili», o se lo siano solo in relazione ai mezzi di misura di cui disponiamo. Non è però necessario insistere su tale punto, poiché Leibnitz stesso ha dichiarato d'altra parte che questo non è il caso dei differenziali[4], dal che si deve concludere non solo che il paragone del granello di sabbia era manifestamente scorretto in sé, ma inoltre che esso in fondo non rispondeva, nel suo pensiero, alla vera nozione di «incomparabili» almeno in quanto tale nozione debba applicarsi alle quantità infinitesimali.

Certuni hanno creduto, tuttavia, che il calcolo infinitesimale non potrebbe essere reso perfettamente rigoroso se non a condizione di poter considerare nulle le quantità infinitesimali. e, al contempo, hanno pensato a torto che un errore potesse supporsi nullo giacché lo si poteva supporre piccolo quanto si vuole; a torto, diciamo, perché ciò equivale ad ammettere che una variabile, come tale, possa raggiungere il suo limite. Ecco del resto cosa dice in proposito Carnot: «Alcuni credono di aver sufficientemente stabilito il principio dell'analisi infinitesimale avendo fatto questo ragionamento: è evidente, essi dicono, e riconosciuto da tutti, che gli errori cui darebbero luogo i procedimenti dell'analisi infinitesimale, se ve ne fossero, potrebbero sempre essere supposti piccoli quanto si vuole; è altresì

---

[3] Lettera al marchese de l'Hospital, 14-24 giugno 1695.

[4] Lettera a Varignon, 2 febbraio 1702, cit.

evidente come ogni errore che si è padroni di supporre piccolo quanto si vuole sia nullo, poiché, potendolo supporre così, lo si può supporre pari a zero; quindi, i risultati dell'analisi infinitesimale sono rigorosamente esatti. Questo ragionamento, a prima vista plausibile, è però tutt'altro che giusto, perché è falso affermare che, essendo padroni di rendere un errore piccolo quanto si vuole, si possa per questo renderlo assolutamente nullo... Ci si trova costretti nell'alternativa o di commettere un errore, per quanto piccolo lo si voglia supporre, o di cadere in una formula che non insegna nulla, ed è precisamente questo il nodo delle difficoltà nell'analisi infinitesimale»[5].

Certamente una formula nella quale rientra un rapporto che si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ «non insegna nulla», ed anzi si può dire che non ha in sé alcun senso; è solo in virtù di una convenzione, del resto giustificata, che si può attribuire un senso alla forma $\frac{0}{0}$, considerandola un simbolo di indeterminazione[6]; ma questa stessa indeterminazione fa sì che il rapporto, assunto in questa forma, potrebbe essere uguale a checchessia, mentre esso deve al contrario conservare un valore determinato in ciascun caso particolare: è l'esistenza di questo valore determinato che Leibnitz[7] adduce, e tale argomento è in sé perfettamente inattaccabile[8]. Sennonché, occorre riconoscere chiaramente che la nozione di «quantità evanescenti» ha, secondo l'espressione di Lagrange, «il grosso inconveniente di considerare le quantità nello stato in cui cessano, per così dire, di essere quantità»; ma, contrariamente a quel che pensava Leibnitz, non vi è alcun bisogno di considerarle proprio nell'istante in cui svaniscono, e neppure di ammettere che possano davvero svanire, poiché in tal caso cesserebbero di essere effettivamente quantità. D'altronde ciò presuppone essenzialmente che non vi sia un «infinitamente piccolo» inteso «a rigore», poiché tale «infinitamente piccolo» o almeno ciò che si chiamerebbe così adottando il linguaggio di Leibnitz – non potrebbe che essere zero, così come un «infinitamente grande», inteso allo stesso modo, non potrebbe che essere il «numero infinito»; ma in realtà zero non è un numero, e non vi è «quantità nulla» più di quanto vi sia «quantità infinita». Lo zero matematico, nella sua

---

[5] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, cit., p. 36.

[6] Si veda la nota precedente su tale argomento.

[7] Con la differenza che, per lui, il rapporto $\frac{0}{0}$ non è indeterminato ma, come abbiamo detto sopra, sempre uguale a 1, mentre invece il valore di cui si tratta differisce in ciascun caso.

[8] Cfr. Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, cit., pp. 45-46: «Se gli incrementi sono ricondotti allo stato di puri zeri non hanno più alcun significato. La loro proprietà è di essere non rigorosamente nulli, bensì indefinitamente decrescenti, senza potersi mai confondere con zero, in virtù del principio generale secondo cui una variabile non può mai coincidere col suo limite.»

accezione stretta e rigorosa, non è che una negazione, almeno sotto l'aspetto quantitativo, e non si può dire che l'assenza di quantità costituisca ancora una quantità; questo è un punto sul quale dovremo tornare tra poco per sviluppare più completamente le diverse conseguenze che comporta.

L'espressione «quantità evanescenti», insomma, ha soprattutto il torto di prestarsi ad equivoco, e di far credere che si considerino le quantità infinitesimali come se si annullassero effettivamente, poiché, a meno di non cambiare il senso alle parole, è difficile ritenere che «svanire», quando si tratta di quantità, possa voler dire altro che annullarsi. In realtà le quantità infinitesimali, intese nel loro vero significato di quantità indefinitamente decrescenti, non possono mai dirsi «evanescenti» nel senso proprio del termine, e sarebbe stato sicuramente preferibile non introdurre una simile nozione, la quale appartiene in fondo alla concezione che Leibnitz si formava della continuità, cosicché, come tale, comporta inevitabilmente l'elemento di contraddizione inerente all'illogicità di questa stessa concezione. Ora, se un errore, pur potendo essere reso piccolo quanto si vuole, non può mai divenire assolutamente nullo, come potrà il calcolo infinitesimale essere veramente rigoroso, e, se di fatto l'errore è praticamente trascurabile, si dovrà per questo concludere che tale calcolo si riduca ad un semplice metodo di approssimazione, o per lo meno, come ha detto Carnot di «compensazione»? Dovremo risolvere in seguito tale questione; tuttavia, poiché siamo stati condotti a parlare qui dello zero e della pretesa «quantità nulla», è meglio trattare subito quest'altro argomento, la cui importanza, come si vedrà, è ben lungi dall'essere trascurabile.

XV - Zero non è un numero

Il decremento indefinito dei numeri non può giungere ad un «numero nullo», non più di quanto il loro incremento indefinito possa giungere ad un «numero infinito», e ciò per la stessa ragione, giacché uno dei due numeri dovrebbe essere l'inverso dell'altro; infatti, in base a quanto abbiamo detto in precedenza a proposito dei numeri inversi, i quali sono altrettanto distanti dall'unità nelle due serie, l'una crescente e l'altra decrescente, aventi come punto di partenza comune tale unità, e siccome vi sono necessariamente tanti termini nell'una quanto nell'altra serie, gli ultimi termini – cioè il «numero infinito» ed il «numero nullo» – dovrebbero risultare, se esistessero, altrettanto distanti dall'unità, ed essere quindi l'inverso l'uno dell'altro[1]. In tali condizioni, se il segno ∞ è in realtà il simbolo delle quantità indefinitamente crescenti, il segno 0 dovrebbe logicamente poter essere assunto come simbolo delle quantità indefinitamente decrescenti, al fine di esprimere nella notazione la simmetria esistente, come abbiamo detto, tra le une e le altre; malauguratamente, il segno 0 possiede già tutt'altro significato, designando originariamente l'assenza di ogni quantità, mentre il segno ∞ non possiede alcun significato reale che vi corrisponda. È questa una nuova fonte di confusione, come quelle che si producono a proposito delle «quantità evanescenti», e occorrerebbe, onde evitarle, creare per le quantità indefinitamente decrescenti un simbolo diverso dallo zero, poiché tali quantità hanno la caratteristica di non potersi mai annullare nella loro variazione; in ogni caso, con la notazione attualmente impiegata dai matematici, sembra pressoché impossibile che simili confusioni non si producano.

Se insistiamo nell'osservare che zero, in quanto rappresenta l'assenza di ogni quantità, non è un numero e non può essere ritenuto tale – benché

[1] Ciò sarebbe rappresentato, secondo la notazione ordinaria, dalla formula $0 \times \infty = 1$; di fatto però la forma $0 \times \infty$ è anch'essa, come $\frac{0}{0}$, una «forma indeterminata», e si può scrivere $0 \times \infty = n$, designando con n un numero qualunque, il che d'altronde già mostra come in realtà 0 e ∞ non possano rappresentare numeri determinati; ma torneremo su questo punto. Va sottolineato d'altra parte che $0 \times \infty$ corrisponde, rispetto ai «limiti di somme» del calcolo integrale, a quel che $\frac{0}{0}$ rappresenta rispetto ai «limiti di rapporti» del calcolo differenziale.

ciò possa sembrare tutto sommato assai evidente a coloro che non hanno mai avuto occasione di venire a conoscenza di certe discussioni –, è perché, dal momento in cui si ammette l'esistenza di un «numero nullo», inteso come il «più piccolo dei numeri», si è costretti a supporre correlativamente come suo inverso un «numero infinito», nel senso del «più grande dei numeri». Se dunque si accetta il postulato secondo il quale zero è un numero, l'argomentazione a favore del «numero infinito» può risultare di conseguenza perfettamente logica[2]; ma è proprio questo postulato che dobbiamo respingere, poiché, se le conseguenze che se ne deducono sono contraddittorie – e abbiamo visto che l'esistenza del «numero infinito» lo è effettivamente –, è perché già esso implica contraddizione. La negazione della quantità, infatti, non può in alcun modo essere assimilata ad una quantità; la negazione del numero o della grandezza non può in alcun senso né ad alcun grado costituire una specie di numero o di grandezza; pretendere il contrario significa sostenere che qualcosa possa essere, secondo l'espressione di Leibnitz, «equivalente ad una specie del suo contraddittorio»; tanto varrebbe dire fin da subito che la negazione della logica è la logica stessa.

È dunque contraddittorio parlare di zero come di un numero, o supporre uno «zero di grandezza» che sarebbe ancora una grandezza, da cui risulterebbero necessariamente tanti zeri distinti quante sono le specie differenti di grandezza; in realtà non può esservi che lo zero puro e semplice, il quale non è altro che la negazione della quantità, in qualunque suo modo sia del resto considerata quest'ultima[3]. Essendo questo il vero significato dello zero aritmetico inteso «a rigore», è evidente che tale significato non ha nulla in comune con la nozione delle quantità indefinitamente decrescenti – le quali sono sempre quantità e non un'assenza di quantità –, e neppure con qualcosa che sarebbe in qualche modo intermedio tra lo zero e la quantità, il che costituirebbe di nuovo una concezione del tutto inintelligibile, e, nel suo ordine, ricorderebbe del resto assai da vicino quella della «virtualità» leibnitziana, di cui abbiamo detto qualche parola precedentemente.

---

[2] È su questo postulato, infatti, che si fonda in gran parte l'argomentazione di L. Couturat contenuta nella sua tesi *De l'infini mathématique,* cit.

[3] Da ciò consegue inoltre che zero non può essere inteso come un limite nel senso matematico del termine, poiché un vero limite è sempre, per definizione, una quantità; è peraltro evidente che una quantità indefinitamente decrescente non ha maggiori limiti di quanti ne abbia una quantità indefinitamente crescente, o per lo meno l'una e altra non possono avere altri limiti se non quelli che risultano necessariamente dalla natura stessa della quantità come tale – il che costituisce un'accezione assai differente del termine «limite» benché vi sia d'altronde fra questi due significati un certo rapporto, che indicheremo più avanti -; matematicamente si può parlare solo del limite del rapporto tra due quantità indefinitamente crescenti o tra due quantità indefinitamente decrescenti, e non del limite di queste quantità stesse.

Possiamo ora tornare all'altro significato che lo zero possiede di fatto nella notazione abituale, al fine di vedere come le confusioni di cui abbiamo parlato si siano potute introdurre: abbiamo detto in precedenza che un numero, dal momento in cui non ci è più possibile esprimerlo o rappresentarlo distintamente in una maniera qualsiasi, può essere visto in qualche modo come praticamente indefinito; nell'ordine crescente un tale numero, qualunque esso sia, potrà soltanto essere simbolizzato dal segno ∞, in quanto quest'ultimo rappresenta l'indefinitamente grande; non si tratta quindi di un numero determinato, bensì di tutto un dominio, il che è d'altronde necessario affinché si possano considerare, nell'indefinito, sia disuguaglianze, sia ordini differenti di grandezza. Manca, nella notazione matematica, un simbolo col quale rappresentare il dominio corrispondente nell'ordine decrescente, ossia quel che si può chiamare il dominio dell'indefinitamente piccolo; tuttavia, siccome un numero appartenente a tale dominio è di fatto trascurabile nei calcoli, si è presa l'abitudine di reputarlo praticamente nullo, benché non si tratti che di una semplice approssimazione risultante dall'imperfezione inevitabile dei nostri mezzi d'espressione e di misura; è senza dubbio per questa ragione che si è giunti a simbolizzarlo mediante il medesimo segno 0, il quale rappresenta d'altra parte l'assenza rigorosa di ogni quantità. Solo in questo senso il segno 0 diviene in qualche modo simmetrico del segno ∞, cosicché possono essere posti rispettivamente alle due estremità della serie dei numeri che abbiamo esaminato in precedenza come estendentesi indefinitamente, tramite i numeri interi ed i loro inversi, nelle due direzioni crescente e decrescente. Questa serie si presenta allora nella forma seguente:

$$0 \ldots\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \infty;$$

occorre però far bene attenzione al fatto che 0 e ∞ non rappresentano in alcun modo due numeri determinati, che concluderebbero la serie nelle due direzioni, bensì due domini indefiniti, in cui non possono al contrario esservi ultimi termini in ragione della loro stessa indefinitezza; è d'altronde evidente come lo zero non possa qui rappresentare né un numero nullo, che costituirebbe un ultimo termine in senso decrescente, né una negazione o un'assenza di ogni quantità, che non può trovare alcun posto in questa serie di quantità numeriche.

In tale serie, come abbiamo spiegato precedentemente, due numeri equidistanti dall'unità centrale sono inversi o complementari l'uno dell'altro, quindi riproducono l'unità tramite la loro moltiplicazione: $\frac{1}{n} \times n = 1$, cosicché, per le due estremità della serie, si sarebbe portati a scrivere anche $0 \times \infty = 1$; ma, poiché i segni 0 e ∞, fattori di quest'ultimo prodotto, non rappresentano numeri determinati, ne discende che la stessa espressione $0 \times \infty$ costituisce un simbolo di indeterminazione, o quel che si dice una «forma indeterminata», e si deve allora scrivere $0 \times \infty = n$, essendo n

un numero qualunque[4]; non è men vero, ad ogni modo, che si è così ricondotti al finito ordinario, le due indefinitezze opposte neutralizzandosi per così dire a vicenda. Anche in questo caso si vede molto chiaramente, una volta di più, che il simbolo ∞ non rappresenta affatto l'Infinito, poiché l'Infinito, nel suo vero significato non può avere né opposto né complementare, e non può entrare in correlazione con checchessia – non più con lo zero, in qualunque maniera lo si intenda, che con l'unità o con un numero qualunque, né d'altronde con una cosa particolare, a qualsiasi ordine appartenga, quantitativo o meno; essendo il Tutto universale ed assoluto, contiene tanto il Non-Essere quanto l'Essere, cosicché lo zero stesso, qualora non sia inteso come un puro nulla, dev'essere necessariamente considerato come compreso nell'Infinito.

Nel fare qui allusione al Non-Essere, tocchiamo un altro significato dello zero, totalmente diverso da quelli che abbiamo esaminato, e del resto il più importante dal punto di vista del suo simbolismo metafisico; a tale riguardo è però necessario, onde evitare ogni confusione tra il simbolo e ciò che esso rappresenta, precisare bene che lo Zero metafisico – ossia il Non-Essere – non è lo zero di quantità, così come l'Unità metafisica – ossia l'Essere – non è l'unità aritmetica; ciò che è così designato mediante tali termini può esserlo soltanto per trasposizione analogica, poiché, dal momento in cui ci si pone nell'Universale, si è evidentemente al di là di qualsiasi dominio speciale come quello della quantità. D'altronde non è in quanto rappresenta l'indefinitamente piccolo che lo zero, mediante una simile trasposizione, può essere assunto come simbolo del Non-Essere, ma in quanto rappresenta, secondo la sua accezione matematica più rigorosa, l'assenza di quantità, la quale in effetti simboleggia nel suo ordine la possibilità di non-manifestazione – allo stesso modo in cui l'unità simboleggia la possibilità di manifestazione, essendo il punto di partenza della molteplicità indefinita dei numeri, così come l'Essere è il principio di ogni manifestazione[5].

Questo ci conduce ancora ad osservare che, in qualunque maniera si consideri lo zero, non lo si possa in ogni caso scambiare per un puro nulla, il quale non corrisponde metafisicamente che all'impossibilità e d'altronde non può logicamente essere rappresentato da alcunché. Ciò è fin troppo evidente quando si tratti dell'indefinitamente piccolo; è vero che quest'ultimo, se si vuole, è solo un senso derivato, dovuto, come dicevamo poc'anzi, ad una sorta di assimilazione approssimativa tra una quantità per noi trascurabile e l'assenza di ogni quantità; ma, riguardo all'assenza stessa di quantità, ciò che è nullo sotto tale aspetto può non esserlo affatto sotto altri aspetti, come si vede chiaramente da un esempio come quello del punto che, essendo indivisibile, è per ciò stesso inesteso, ossia spazialmente

---

[4] Si veda in proposito la nota precedente.

[5] Su tale argomento si veda *Les États multiples de l'être*, cit., cap. III.

nullo[6], ma è nondimeno, come abbiamo esposto altrove, il principio stesso di tutta l'estensione[7]. È d'altronde veramente strano che i matematici abbiano generalmente l'abitudine di considerare lo zero un puro nulla, e sia tuttavia loro impossibile non ritenerlo al contempo dotato di una potenza indefinita, poiché, posto a destra di un'altra cifra detta «significativa», contribuisce a formare la rappresentazione di un numero il quale, tramite la ripetizione dello zero, può crescere indefinitamente, come accade ad esempio nel caso del numero dieci e delle sue potenze successive. Se realmente lo zero fosse un puro nulla, ciò non potrebbe accadere, ed anzi, a dire il vero, esso non sarebbe allora che un segno inutile, del tutto privo di ogni valore effettivo; vi è dunque, nelle concezioni matematiche moderne, un'altra inconseguenza da aggiungere a tutte quelle che abbiamo avuto occasione di segnalare sinora.

---

[6] Per questo, come abbiamo detto sopra, il punto non può in alcun modo essere reputato un elemento o una parte dell'estensione

[7] Si veda *Le Symbolisme de la Croix*, cit., cap. XVI.

XVI - La notazione dei numeri negativi

Se, dei due significati matematici dello zero, torniamo ora al secondo, ossia allo zero inteso come rappresentazione dell'indefinitamente piccolo, è importante innanzitutto sottolineare che il dominio di quest'ultimo comprende, nella serie doppiamente indefinita dei numeri, tutto quanto si trova al di là dei nostri mezzi di valutazione in una direzione, così come il dominio dell'indefinitamente grande comprende, in questa medesima serie, tutto quanto si trova al di là di tali mezzi di valutazione nell'altra direzione. Stando così le cose, è evidentemente fuori luogo parlare di numeri «minori di zero», non meno che di numeri «maggiori di infinito»[1]; e ciò è ancora più inaccettabile, se possibile, allorché lo zero, nell'altro suo significato, rappresenta in modo puro e semplice l'assenza di ogni quantità, poiché una quantità che fosse minore di niente sarebbe propriamente inconcepibile. Eppure è proprio ciò che si è voluto fare, in un certo senso, introducendo in matematica la considerazione dei numeri negativi, e dimenticando, per effetto del «convenzionalismo» moderno, che in origine tali numeri non rappresentano altro che l'indicazione del risultato di una sottrazione realmente impossibile, mediante la quale un numero più grande dovrebbe essere sottratto ad un numero più piccolo; abbiamo già fatto notare, del resto, che tutte le generalizzazioni o estensioni dell'idea di numero provengono in realtà dalla considerazione di operazioni impossibili dal punto di vista dell'aritmetica pura; questa concezione dei numeri negativi e le conseguenze che essa comporta richiedono però qualche altra spiegazione.

Abbiamo detto in precedenza che la serie dei numeri interi si forma a partire non dallo zero, bensì dall'unità; essendo posta l'unità, infatti, se ne deduce tutta la serie dei numeri, cosicché si può affermare che quest'ultima è già implicita e contenuta in principio nell'unità iniziale[2], mentre dallo zero non si può trarre evidentemente alcun numero. Il passaggio dallo zero all'unità non può effettuarsi allo stesso modo del passaggio dall'unità agli

[1] L'originale francese riporta «plus grands que l'indéfini», ma riteniamo si tratti di un errore di stampa, e si debba leggere «maggiori di infinito», espressione già impiegata dall'Autore (Cap. I, p. 24; Cap. II, p. 34) [NdT.].

[2] Parimenti, per trasposizione analogica, tutta la molteplicità indefinita delle possibilità di manifestazione è contenuta in principio ed «eminentemente» nell'Essere puro, o Unità metafisica.

altri numeri, o da un qualunque numero al successivo, e, in fondo, supporre possibile tale passaggio equivale ad aver già posto implicitamente l'unità[3]. Insomma, porre zero all'inizio della serie dei numeri come se fosse il primo di essa può avere solo due significati: o si ammette realmente, al contrario di quanto abbiamo stabilito, che zero è un numero, e che, di conseguenza, può avere con gli altri numeri rapporti dello stesso ordine di quelli che tali numeri hanno tra loro – il che non è, poiché zero moltiplicato o diviso per un numero qualsiasi dà comunque zero; oppure si tratta di un semplice artificio di notazione, che può comportare soltanto confusioni più o meno inestricabili. L'impiego di tale artificio, in effetti, non si giustifica se non per consentire l'introduzione della notazione dei numeri negativi, e, se l'utilizzo di tale notazione offre senza dubbio certi vantaggi per la comodità dei calcoli – considerazione tutta «pragmatica» non qui in causa e priva di vera importanza dal nostro punto di vista –, è facile rendersi conto che ciò non manca d'altra parte di presentare gravi inconvenienti logici. A tale riguardo la prima difficoltà cui dà luogo è proprio la concezione delle quantità negative come «minori di zero», da Leibnitz annoverata tra le affermazioni solo «*toleranter verae*», ma in realtà, come dicevamo poc'anzi, totalmente priva di senso. «Sostenere che una quantità negativa isolata è minore di zero – ha detto Carnot – significa coprire la scienza matematica, che dev'essere quella dell'evidenza, di una nube impenetrabile e perdersi in un labirinto di paradossi l'uno più bizzarro dell'altro»[4]. Su questo punto possiamo attenerci a tale giudizio, non sospetto e certamente per nulla esagerato; non si dovrebbe d'altronde mai dimenticare, nell'uso che si fa della notazione dei numeri negativi, che non si tratta di nulla più che una semplice convenzione.

La ragione di tale convenzione è la seguente: quando una sottrazione è aritmeticamente impossibile, il suo risultato è tuttavia suscettibile di interpretazione nel caso in cui tale sottrazione si riferisca a grandezze che possono essere contate in due direzioni opposte, come ad esempio le distanze misurate su una linea, o gli angoli di rotazione attorno ad un punto fisso, o ancora i tempi calcolati, a partire da un certo istante, procedendo verso il futuro o verso il passato. Da qui la rappresentazione geometrica abituale dei numeri negativi: se si considera una retta intera, indefinita nelle due direzioni, e non più solamente una semiretta come abbiamo fatto in precedenza, si calcolano su tale retta le distanze come positive o come negative secondo che siano percorse in un senso o nell'altro, e si fissa un punto, assunto come origine, a partire dal quale le distanze sono dette positive da un lato e negative dall'altro. A ciascun punto della retta

---

[3] Ciò risulta del tutto evidente se, in conformità alla legge generale di formazione della serie dei numeri, si rappresenta tale passaggio mediante la formula $0+1=1$.

[4] «Nota sulle quantità negative», posto alla fine di *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, cit., p 173.

corrisponderà un numero che sarà la misura della sua distanza dall'origine, e che possiamo chiamare, per semplificare il linguaggio, il suo coefficiente; anche in questo caso l'origine avrà naturalmente per coefficiente zero, mentre il coefficiente di ogni altro punto della retta sarà un numero provvisto del segno + o –, segno che, in realtà, indicherà semplicemente da quale lato è situato tale punto rispetto all'origine. Su una circonferenza si potrà parimenti distinguere un senso di rotazione positivo ed uno negativo, e calcolare, a partire da una posizione iniziale del raggio, gli angoli come positivi o come negativi secondo che descrivano l'uno o l'altro senso, il che darebbe luogo ad osservazioni analoghe. Per limitarci all'esame della retta, due punti equidistanti dall'origine, da una parte e dall'altra di essa, avranno per coefficiente lo stesso numero ma con segni contrari, mentre un punto più lontano di un altro dall'origine avrà naturalmente per coefficiente un numero in ogni caso più grande; si vede pertanto che, se un numero n è maggiore di un numero m, è assurdo affermare come si fa ordinariamente che $-n$ è minore di $-m$, poiché esso rappresenta al contrario una distanza più grande. D'altronde, il segno così posto dinanzi a un numero non può realmente modificarlo in alcun modo dal punto di vista della quantità, poiché non rappresenta nulla che si riferisca alla misura delle distanze, ma solamente la direzione secondo cui tali distanze sono percorse, direzione che è un elemento d'ordine propriamente qualitativo e non quantitativo[5].

D'altra parte, essendo la retta indefinita nelle due direzioni, si è portati a considerare un indefinito positivo ed un indefinito negativo, rappresentati rispettivamente dai segni $+\infty$ e $-\infty$, e comunemente designati con le assurde espressioni di «più infinito» e «meno infinito»; c'è da chiedersi cosa mai potrebbe essere un infinito negativo, o cosa potrebbe sussistere se da qualcosa o persino da nulla – giacché i matematici reputano lo zero un nulla – si sottraesse l'infinito; si tratta di cose che è sufficiente enunciare in un linguaggio chiaro perché si veda immediatamente come siano del tutto prive di senso. Occorre ancora aggiungere che si è stati in seguito indotti, in particolare nello studio della variazione delle funzioni, a considerare l'indefinito negativo come confondentesi con l'indefinito positivo, cosicché un mobile partito dall'origine, e allontanantesi costantemente nella direzione positiva, tornerebbe verso di essa dal lato negativo, o inversamente, qualora il suo moto si protraesse per un tempo indefinito, da cui risulta che la retta, o ciò che tale è considerata, dev'essere in realtà una linea chiusa, benché indefinita. Si potrebbe d'altronde dimostrare che le proprietà della retta nel piano sono del tutto analoghe a quelle di un grande cerchio o cerchio diametrale sulla superficie di una sfera, cosicché il piano e la retta possono

[5] Si veda *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. IV. – Ci si potrebbe chiedere se non vi sia come una sorta di ricordo inconsapevole di tale carattere qualitativo nel fatto che i matematici designano ancora talvolta i numeri assunti «col loro segno» ossia considerati come positivi o negativi, col nome di «numeri qualificati», sebbene d'altronde essi non sembrino attribuire alcun senso ben definito a tale espressione.

essere assimilati ad una sfera e ad un grande cerchio di raggio indefinitamente grande, e di conseguenza di curvatura indefinitamente piccola, i cerchi ordinari del piano essendo allora assimilabili ai piccoli cerchi di questa medesima sfera; tale assimilazione per divenire rigorosa presuppone d'altronde un «passaggio al limite», poiché è evidente che, per quanto grande divenga il raggio nella sua crescita indefinita, si ha pur sempre una sfera, non un piano; questa sfera tende soltanto a confondersi col piano, ed i suoi grandi cerchi con delle rette, cosicché il piano e la retta costituiscono qui dei limiti, allo stesso modo in cui il cerchio è il limite di un poligono regolare il cui numero di lati cresca indefinitamente. Faremo soltanto osservare, senza insistervi oltre, che tramite considerazioni di questo genere si colgono in qualche modo direttamente i limiti stessi dell'indefinitezza spaziale; come si può dunque, in tutto ciò, se si vuole mantenere qualche parvenza di logica, parlare ancora di infinito?

Considerando i numeri positivi e negativi nel modo che abbiamo appena indicato, la serie dei numeri assume la forma seguente:

$$-\infty \ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots +\infty,$$

l'ordine di tali numeri essendo il medesimo di quello dei punti corrispondenti sulla retta, ossia dei punti aventi questi stessi numeri come coefficienti rispettivi, il che costituisce d'altronde il marchio dell'origine reale della serie così formata. Tale serie, benché ugualmente indefinita nelle due direzioni, è del tutto differente da quella che abbiamo esaminato in precedenza e che comprendeva i numeri interi ed i loro inversi: essa è simmetrica non più rispetto all'unità, ma rispetto allo zero, il quale corrisponde all'origine delle distanze; così, se due numeri equidistanti da questo termine centrale lo riproducono ancora, non è più per moltiplicazione come nel caso dei numeri inversi, ma per addizione «algebrica», effettuata cioè tenendo conto dei loro segni rispettivi, il che costituisce aritmeticamente una sottrazione. D'altra parte questa nuova serie non è affatto – come lo era invece la precedente –indefinitamente crescente in una direzione e indefinitamente decrescente nell'altra, o per lo meno, se si ha la pretesa di intenderla così, non può esserlo che per un «modo di dire» tra i più scorretti, lo stesso secondo il quale si considerano numeri «minori di zero»; in realtà questa serie è indefinitamente crescente nelle due direzioni in ugual modo, poiché presenta da una parte e dall'altra dello zero centrale la medesima serie dei numeri interi; quel che si chiama «valore assoluto» – espressione anch'essa assai singolare – dev'essere preso in considerazione soltanto sotto l'aspetto puramente quantitativo, e, a tale riguardo, i segni positivi e negativi non cambiano alcunché, non esprimendo altro che le relazioni di «situazione» da noi spiegate poc'anzi. L'indefinito negativo dunque non è per nulla assimilabile all'indefinitamente piccolo; esso lo è invece, come l'indefinito positivo, all'indefinitamente grande; la sola differenza, non di ordine quantitativo, è che si sviluppa in un'altra direzione, il che è perfettamente concepibile quando si tratti di grandezze spaziali o

temporali, ma totalmente privo di senso nel caso delle grandezze aritmetiche, per le quali un simile sviluppo è necessariamente unico, non potendo costituire altro che la serie stessa dei numeri interi.

Tra le altre conseguenze bizzarre o illogiche della notazione dei numeri negativi, segnaleremo ancora la considerazione, introdotta per la risoluzione delle equazioni algebriche, delle quantità «immaginarie», annoverate da Leibnitz, come abbiamo visto, al pari delle quantità infinitesimali, tra quelle che chiamava «finzioni ben fondate»; simili quantità, o cosiddette tali, si presentano come radici di numeri negativi, il che in realtà corrisponde di nuovo ad un'impossibilità pura e semplice, poiché, che un numero sia positivo o negativo, il suo quadrato è sempre necessariamente positivo in virtù delle regole stesse della moltiplicazione algebrica. Anche se si potesse, attribuendo a queste quantità «immaginarie» un senso differente, riuscire a farle corrispondere a qualcosa di reale, questione che non prenderemo qui in esame, è ben certo in ogni caso che la loro teoria e la sua applicazione alla geometria analitica, quali sono esposte dai matematici attuali, appaiono soltanto come un vero e proprio coacervo di confusioni e di assurdità, e come il prodotto di un bisogno di generalizzazioni eccessive e del tutto artificiali, che non arretra neppure di fronte a enunciati di proposizioni manifestamente contraddittorie; certi teoremi sugli «asintoti del cerchio», ad esempio, basterebbero ampiamente a provare che non esageriamo affatto. Certo, si potrà dire che non si tratta della geometria propriamente detta, ma solamente – come la considerazione della «quarta dimensione» dello spazio – dell'algebra tradotta in linguaggio geometrico[6]; ma la cosa grave è appunto che, essendo una simile traduzione quanto il suo inverso possibile e legittima in una certa misura, si voglia estenderla anche ai casi in cui essa non può più significare nulla, ed è ben questo che costituisce il sintomo di una straordinaria confusione di idee, ed al tempo stesso l'estrema conseguenza di un «convenzionalismo» che giunge sino a far perdere il senso di ogni realtà.

[6] Cfr. *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., capp. XVIII e XXIII.

XVII - Rappresentazione dell'equilibrio delle forze

A proposito dei numeri negativi – e benché ciò non costituisca che una digressione rispetto all'argomento principale del nostro studio –, parleremo ancora delle contestabilissime conseguenze che l'impiego di tali numeri comporta dal punto di vista della meccanica; d'altronde quest'ultima è in realtà, per il suo oggetto, una scienza fisica, ed il fatto stesso di trattarla come parte integrante della matematica, conseguenza del punto di vista esclusivamente quantitativo della scienza attuale, non manca di introdurvi deformazioni assai singolari. A tale riguardo diciamo solamente che i pretesi «principi» – così chiamati in maniera del tutto abusiva – sui quali i matematici moderni basano questa scienza quale essi la concepiscono, non sono propriamente che ipotesi più o meno fondate, o, nel caso più favorevole, semplici leggi più o meno generali, forse più generali di altre, se si vuole, ma che non hanno in ogni caso nulla in comune con i veri principi universali, e, in una scienza costituita secondo il punto di vista tradizionale, costituirebbero al più applicazioni di tali principi ad un dominio ancora molto particolare. Senza addentrarci in sviluppi troppo lunghi, citeremo, come esempio del primo caso, il cosiddetto «principio d'inerzia», che nulla potrebbe giustificare, né l'esperienza, la quale mostra al contrario come non vi sia da nessuna parte inerzia in natura, né l'intendimento, il quale non può concepire questa pretesa inerzia, essa non potendo consistere che nell'assenza completa di ogni proprietà; si potrebbe applicare legittimamente un termine simile solo alla potenzialità pura della sostanza universale, o della materia prima degli scolastici, la quale è d'altronde, per questa stessa ragione, propriamente «inintelligibile»; tale materia prima è però sicuramente tutt'altra cosa rispetto alla «materia» dei fisici[1]. Un esempio del secondo caso è quello chiamato «principio d'uguaglianza di azione e reazione», il quale è così poco un principio che si deduce immediatamente dalla legge generale dell'equilibrio delle forze naturali: ogni qual volta un tale equilibrio sia rotto in un modo qualunque, esso tende subito a ristabilirsi, donde una reazione la cui intensità è equivalente a quella dell'azione che l'ha provocata; si tratta dunque di un semplice caso particolare di quel che la tradizione estremo-orientale chiama le «azioni e reazioni concordanti», le quali non concernono affatto il solo mondo corporeo come le leggi della meccanica, bensì l'insieme della

[1] Cfr. *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. II.

manifestazione in tutti i suoi modi ed in tutti i suoi stati; è proprio sulla questione dell'equilibrio e della sua rappresentazione matematica che ci proponiamo ora di insistere un poco, poiché è in sé abbastanza importante da meritare che ci si soffermi un istante.

Si rappresentano abitualmente due forze in equilibrio tra loro mediante due «vettori» opposti, ossia mediante due segmenti di retta di uguale lunghezza ma diretti in senso contrario: se due forze applicate in uno stesso punto hanno pari intensità e pari direzione, ma senso contrario, esse sono in equilibrio; dato che risultano così prive di azione sul loro punto di applicazione, si dice anche comunemente che si annullano, non badando che, se si sopprime una di tali forze, l'altra agirà immediatamente, il che prova come in realtà non fosse affatto annullata. Si caratterizzano le forze mediante coefficienti numerici proporzionali alle loro rispettive intensità, e due forze di senso contrario presentano coefficienti di segno differente, uno positivo e l'altro negativo: l'uno essendo f l'altro sarà $-f'$. Nel caso che abbiamo appena esaminato, avendo le due forze pari intensità, i coefficienti che le caratterizzano devono essere uguali «in valore assoluto», si ha cioè $f = f'$, da cui si deduce come condizione dell'equilibrio $f - f' = 0$, vale a dire che la somma algebrica delle due forze o dei due «vettori» che le rappresentano è nulla, cosicché l'equilibrio è definito mediante lo zero. Avendo d'altronde i matematici, come abbiamo detto sopra, il torto di reputare lo zero una sorta di simbolo del nulla, come se il nulla potesse essere simboleggiato da checchessia, sembra discenderne che l'equilibrio sia lo stato di non-esistenza, il che costituisce una conseguenza assai singolare; senza dubbio anche per questa ragione, anziché dire che due forze in equilibrio tra loro si neutralizzano, come sarebbe esatto, si dice che si annullano, il che è contrario alla realtà, come abbiamo appena mostrato mediante un'osservazione tra le più semplici. La vera nozione dell'equilibrio è ben diversa: per comprenderla è sufficiente osservare che tutte le forze naturali – e non solo le forze meccaniche, le quali, ripetiamolo ancora, non ne costituiscono che un caso molto particolare, ma anche le forze dell'ordine sottile quanto quelle dell'ordine corporeo – sono o attrattive o repulsive; le prime possono essere considerate forze compressive o di contrazione, le seconde forze espansive o di dilatazione[2]; ciò in fondo non costituisce altro che un'espressione, in questo dominio, della stessa

---

[2] Se si esamina la nozione ordinaria delle forze centripete e centrifughe, ci si può rendere conto senza difficoltà che le prime sono riconducibili alle forze compressive e le seconde alle forze espansive, parimenti, una forza di trazione è assimilabile ad una forza espansiva, poiché si esercita a partire dal suo punto d'applicazione, e una forza impulsiva o di choc è assimilabile ad una forza compressiva, poiché si esercita al contrario verso il punto d'applicazione stesso; ma, se le si esaminasse in rapporto al loro punto d'emissione, sarebbe vero l'inverso, il che è d'altronde richiesto dalla legge di polarità. – In un altro dominio, la «coagulazione» e la «soluzione» ermetiche corrispondono altresì rispettivamente alla compressione e all'espansione.

dualità cosmica fondamentale. È facile capire che, in un ambiente originariamente omogeneo, ad ogni compressione producentesi in un punto corrisponderà necessariamente un'espansione equivalente in un altro punto, ed inversamente, cosicché si dovranno sempre considerare correlativamente due centri di forza, ciascuno dei quali non può esistere senza l'altro; è quella che si può chiamare legge di polarità, applicabile, sotto forme diverse, a tutti i fenomeni naturali, derivando anch'essa dalla dualità dei principi stessi che presiedono ad ogni manifestazione; questa legge, nello speciale dominio di cui si occupano i fisici, è evidente soprattutto nei fenomeni elettrici e magnetici, ma non è affatto limitata ad essi. Ora, se due forze, l'una compressiva e l'altra espansiva, agiscono su uno stesso punto, la condizione affinché si equilibrino o si neutralizzino, ossia affinché in tale punto non si produca né contrazione né dilatazione, è che le intensità di queste due forze siano equivalenti; non diciamo uguali, poiché tali forze sono di specie differenti, e d'altronde si tratta proprio di una differenza realmente qualitativa e non semplicemente quantitativa. Si possono caratterizzare le forze mediante coefficienti proporzionali alla contrazione o alla dilatazione da esse prodotta, in maniera tale che, se si considerano una forza compressiva ed una forza espansiva, la prima sarà provvista di un coefficiente $n > 1$ e la seconda di un coefficiente $n' < 1$; ciascuno di tali coefficienti può rappresentare il rapporto tra la densità che assume l'ambiente nel punto in esame, sotto l'azione della forza corrispondente, e la densità originaria di questo stesso ambiente, supposto al riguardo omogeneo se non subisce l'azione di alcuna forza, in virtù di una semplice applicazione del principio di ragion sufficiente[3]. Se non si produce né compressione né dilatazione il rapporto è necessariamente uguale all'unità, la densità dell'ambiente non essendo modificata; affinché due forze agenti in un punto si facciano equilibrio occorre dunque che la loro risultante abbia per coefficiente l'unità. È facile vedere che il coefficiente di tale risultante è il prodotto dei coefficienti delle due forze in questione, e non più la somma come nella concezione ordinaria; i due coefficienti n e n' dovranno quindi essere due numeri inversi l'uno dell'altro: $n' = \frac{1}{n}$, e si avrà, come condizione dell'equilibrio, $n n' = 1$; così, l'equilibrio sarà definito non più mediante lo zero, ma mediante l'unità[4].

Si vede come questa definizione dell'equilibrio mediante l'unità, la sola reale, corrisponda al fatto che l'unità occupa il mezzo nella serie doppiamente indefinita dei numeri interi e dei loro inversi, mentre tale

---

[3] Beninteso, quando parliamo così del principio di ragion sufficiente, lo consideriamo unicamente in sé, al di fuori di tutte le forme specializzate e più o meno contestabili che Leibnitz o altri hanno voluto attribuirgli.

[4] Tale formula corrisponde esattamente alla concezione dell'equilibrio dei due principi complementari *yang* e *yin* nella cosmologia estremo-orientale.

posizione centrale è in qualche modo usurpata dallo zero nella serie artificiale dei numeri positivi e negativi. Ben lungi dal costituire lo stato di non-esistenza, l'equilibrio è al contrario l'esistenza considerata in sé, indipendentemente dalle sue manifestazioni secondarie e molteplici; è chiaro d'altronde che ciò non è affatto il Non-Essere, nel senso metafisico del termine, poiché l'esistenza, anche in questo stato primordiale ed indifferenziato, è solo il punto di partenza di tutte le manifestazioni differenziate, come l'unità è il punto di partenza di tutta la molteplicità dei numeri. Detta unità, quale l'abbiamo considerata e nella quale risiede l'equilibrio, è ciò che la tradizione estremo-orientale chiama l'«invariabile Mezzo»; e, secondo questa stessa tradizione, tale equilibrio o tale armonia costituisce, al centro di ciascuno stato e di ciascuna modalità dell'essere, il riflesso dell'«Attività del Cielo».

XVIII - Quantità variabili e quantità fisse

Torniamo ora alla questione riguardante la giustificazione del rigore del calcolo infinitesimale: abbiamo visto come Leibnitz consideri uguali le quantità la cui differenza, pur non essendo nulla, è tuttavia incomparabile con queste stesse quantità; in altri termini, le quantità infinitesimali, sebbene non siano «*nihila absoluta*», sono nondimeno «*nihila respectiva*», e devono come tali essere trascurate rispetto alle quantità ordinarie. Malauguratamente, la nozione di «incomparabili» permane troppo imprecisa perché un ragionamento fondato solo su di essa sia pienamente sufficiente a stabilire il carattere rigoroso del calcolo infinitesimale; quest'ultimo si presenta insomma, sotto tale aspetto, solo come un metodo d'approssimazione indefinita, e non possiamo dire con Leibnitz che, «ciò posto, ne consegue non solo che l'errore è infinitamente piccolo, ma che è assolutamente nullo»[1]; non vi sarebbe tuttavia un mezzo più rigoroso di pervenire a tale conclusione? Dobbiamo ammettere, in ogni caso, che l'errore introdotto nel calcolo può essere reso piccolo quanto si vuole, il che è già molto; ma non appunto il carattere infinitesimale dell'errore a sopprimerlo del tutto allorché si consideri non più il corso stesso del calcolo, bensì i risultati che permette alla fine di raggiungere?

Una differenza infinitesimale, ossia indefinitamente decrescente, non può che essere la differenza tra due quantità variabili, poiché è evidente che la differenza tra due quantità fisse non può che costituire una quantità fissa essa stessa; considerare una differenza infinitesimale tra due quantità fisse non può dunque avere alcun senso. Possiamo allora affermare che due quantità fisse «sono rigorosamente uguali dal momento che la loro pretesa differenza si può supporre piccola quanto si vuole»[2]; ora, «il calcolo infinitesimale, come il calcolo ordinario, si riferisce in realtà a quantità fisse e determinate»[3]; le quantità variabili, insomma, sono introdotte solo a titolo ausiliario, con un carattere meramente transitorio, e devono scomparire dai risultati, i quali non possono che esprimere relazioni tra quantità fisse. È dunque necessario, per ottenere tali risultati, passare dalla considerazione delle quantità variabili a quella delle quantità fisse; e tale passaggio ha precisamente l'effetto di eliminare le quantità infinitesimali, che sono

[1] Frammento datato 26 marzo 1676.

[2] Carnot, *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, cit., p 29.

[3] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, cit., Prefazione, p. viii.

essenzialmente variabili e possono presentarsi solo come differenze tra quantità variabili.

È ora facile capire perché Carnot, nella definizione da noi citata in precedenza, insista sulla proprietà delle quantità infinitesimali quali sono impiegate nel calcolo, di poter essere rese piccole quanto si vuole «senza che si sia per questo obbligati a far variare le quantità di cui si cerca la relazione». Il fatto è che queste ultime devono essere in realtà quantità fisse; è vero che nel calcolo sono viste come limiti di quantità variabili, ma queste svolgono soltanto il ruolo di semplici ausiliari, al pari delle quantità infinitesimali che introducono con esse. Il punto essenziale, per giustificare il rigore del calcolo infinitesimale, è che, nei risultati, devono figurare solo quantità fisse; al termine del calcolo occorre dunque, in definitiva, passare dalle quantità variabili alle quantità fisse, ed è ben questo un «passaggio al limite», concepito però in tutt'altro modo rispetto a Leibnitz, non costituendo affatto una conseguenza o un «ultimo termine» della variazione stessa; ora, ed è questo che importa, le quantità infinitesimali in tale passaggio si eliminano da sé, e ciò semplicemente in ragione della sostituzione delle quantità fisse alle quantità variabili[4].

Si deve allora vedere in tale eliminazione, come vorrebbe Carnot, solo l'effetto di una semplice «compensazione di errori»? Non lo pensiamo, anzi sembra che si possa vedervi in realtà qualcosa di più, giacché si fa distinzione tra quantità variabili e quantità fisse come costituenti in qualche modo due domini separati, tra i quali esiste senza dubbio una correlazione ed un'analogia – cosa d'altronde necessaria affinché si possa passare effettivamente dall'una all'altra, in qualunque maniera si effettui tale passaggio –, ma senza che i loro rapporti reali possano mai stabilire una compenetrazione o anche una continuità qualunque tra esse; ciò implica d'altronde, tra queste due specie di quantità, una differenza d'ordine essenzialmente qualitativo, in conformità a quanto abbiamo detto più sopra a proposito della nozione di limite. È questa distinzione che Leibnitz non ha mai posto nettamente, essendone stato senza dubbio impedito, anche in questo caso, dalla sua concezione di una continuità applicabile universalmente; egli non poteva accorgersi che il «passaggio al limite» implica essenzialmente una discontinuità, poiché, per lui, non vi è discontinuità da nessuna parte. Eppure è unicamente detta distinzione a permetterci di formulare la seguente proposizione: se la differenza tra due quantità variabili può essere resa piccola quanto si vuole, le quantità fisse

[4] Cfr. Ch. de Freycinet, *ibid.*, p. 220: «Le equazioni chiamate "imperfette" da Carnot sono, a parlar propriamente, equazioni di attesa o di transizione, rigorose nella misura in cui serviranno al calcolo dei limiti ma, al contrario, assolutamente inesatte qualora i limiti non fossero raggiunti effettivamente. È sufficiente tener presente la destinazione effettiva dei calcoli per non provare alcuna incertezza circa il valore delle relazioni attraverso cui si passa. In ciascuna di esse si deve vedere non ciò che sembra esprimere attualmente, bensì ciò che esprimerà più tardi, allorché i limiti saranno raggiunti.»

corrispondenti a queste variabili, e viste come i loro limiti rispettivi, sono rigorosamente uguali. Così, una differenza infinitesimale non può mai divenire nulla, ma può esistere solo tra variabili, mentre tra le quantità fisse corrispondenti la differenza deve essere nulla; da ciò consegue immediatamente che, ad un errore suscettibile di essere reso piccolo quanto si vuole nel dominio delle quantità variabili – ove, in ragione del carattere stesso di tali quantità, non può effettivamente trattarsi di nulla più che un'approssimazione indefinita –, corrisponde necessariamente un errore rigorosamente nullo nel dominio delle quantità fisse; unicamente in ciò, e non in altre considerazioni che, quali esse siano, risultano sempre più o meno esterne o marginali rispetto alla questione, risiede essenzialmente la vera giustificazione del rigore del calcolo infinitesimale.

XIX - Le differenziazioni successive

Quel che precede lascia ancora sussistere una difficoltà circa i differenti ordini di quantità infinitesimali: come si possono concepire quantità che siano infinitesimali non solo in rapporto alle quantità ordinarie, ma anche in rapporto ad altre quantità pure infinitesimali? Anche in questo caso Leibnitz è ricorso alla nozione di «incomparabili», essa è però troppo vaga perché possiamo contentarcene, e non spiega a sufficienza la possibilità delle differenziazioni successive. Tale possibilità può essere senza dubbio meglio compresa tramite un paragone o un esempio tratto dalla meccanica: «Quanto ai *ddx*, essi stanno ai *dx* come i *conatus* della pesantezza o le sollecitazioni centrifughe stanno alla velocità»[1]. Leibnitz sviluppa quest'idea nella sua risposta alle obiezioni del matematico olandese Nieuwentijt, il quale, pur ammettendo i differenziali del primo ordine, sosteneva che quelli degli ordini superiori non potessero che essere nulli: «La quantità ordinaria, la quantità infinitesimale prima o differenziale, e la quantità differenzio-differenziale o infinitesimale seconda, stanno tra esse come il moto, la velocità e la sollecitazione, che è un elemento della velocità[2]. Il moto descrive una linea, la velocità un elemento di linea e la sollecitazione un elemento di elemento»[3]. Si tratta però solo di un esempio o di un caso particolare, che può servire insomma come semplice «illustrazione», non come argomento, ed è necessario fornire una giustificazione di ordine generale, che tale esempio del resto, in un certo senso, contiene implicitamente.

In effetti, i differenziali del primo ordine rappresentano gli incrementi – o meglio le variazioni, queste potendo prodursi, secondo i casi, sia in senso decrescente sia in senso crescente – che subiscono ad ogni istante le quantità ordinarie: tale è la velocità in rapporto allo spazio percorso in un moto qualsiasi. Parimenti, i differenziali di un certo ordine rappresentano le variazioni istantanee di quelli dell'ordine precedente, assunti a loro volta come grandezze esistenti in un certo intervallo: tale è l'accelerazione in rapporto alla velocità. È dunque sulla considerazione di gradi differenti di

---

[1] Lettera a Huygens, 1-2 ottobre 1691.

[2] Tale «sollecitazione» è ciò che si designa abitualmente col nome di «accelerazione».

[3] *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentialem seu unfinitesimalem motas*, in «Acta Eroditorum», Leipzig, 1695.

variazione, ben più che di grandezze incomparabili tra loro, che si fonda in verità la distinzione tra i differenti ordini di quantità infinitesimali.

Per precisare come ciò vada inteso, faremo semplicemente questa osservazione: si possono stabilire, tra le variabili stesse, distinzioni analoghe a quelle che abbiamo stabilito in precedenza tra le quantità fisse e le variabili; in tali condizioni, per riprendere la definizione di Carnot, una quantità sarà detta infinitesimale in rapporto ad altre quando si potrà renderla piccola quanto si vuole «senza che si sia per questo obbligati a far variare queste altre quantità», Il fatto è che una quantità non assolutamente fissa – o anche essenzialmente variabile come nel caso delle quantità infinitesimali, di qualunque ordine siano – può tuttavia essere considerata relativamente fissa e determinata, ossia suscettibile di svolgere il ruolo di quantità fissa in rapporto a certe altre variabili. È soltanto in queste condizioni che una quantità variabile può essere vista come il limite di un'altra variabile, il che presuppone, secondo la definizione stessa di limite, che sia considerata fissa, almeno sotto un certo rapporto, ossia in relazione a quella di cui essa è il limite; inversamente, una quantità potrà essere variabile non solo in sé, o, il che è lo stesso, in rapporto a quantità assolutamente fisse, ma anche in rapporto ad altre variabili, in quanto queste ultime possono essere viste come relativamente fisse.

A tale riguardo, anziché parlare di gradi di variazione come abbiamo fatto sinora, si potrebbe altresì parlare di gradi di indeterminazione, il che in fondo sarebbe esattamente la stessa cosa, esaminata soltanto da un punto di vista un po' differente: una quantità, benché indeterminata per sua natura, può tuttavia essere determinata in un senso relativo mediante l'introduzione di certe ipotesi, che lascino al contempo sussistere l'indeterminazione di altre quantità; queste ultime saranno quindi più indeterminate delle altre, se così si può dire, o indeterminate ad un grado superiore, cosicché potranno avere con esse un rapporto paragonabile a quello che le quantità indeterminate hanno con le quantità veramente determinate. Ci limiteremo in proposito a queste poche indicazioni, poiché, per quanto sommarie, pensiamo siano almeno sufficienti per far comprendere la possibilità dell'esistenza dei differenziali di differenti ordini successivi; tuttavia ci resta ancora, in connessione a tale questione, da mostrare più esplicitamente come non vi sia realmente alcuna difficoltà logica nel considerare gradi molteplici di indefinitezza, sia nell'ordine delle quantità decrescenti, al quale appartengono gli infinitesimali o i differenziali, sia in quello delle quantità crescenti, nel quale si possono parimenti considerare integrali di differenti ordini, simmetrici in qualche modo ai differenziali successivi – il che è d'altronde conforme alla correlazione esistente, come abbiamo spiegato, tra l'indefinitamente crescente e l'indefinitamente decrescente. In ciò, beninteso, è di gradi di indefinitezza che si tratta, e non affatto di «gradi di infinità» come li intendeva Jean Bernoulli, del quale Leibnitz, al riguardo, non osava né ammettere né respingere in maniera assoluta la concezione; e

questo è di nuovo uno dei casi in cui le difficoltà si trovano immediatamente risolte mediante la sostituzione della nozione di indefinito a quella del preteso infinito.

XX - Ordini differenti di indefinitezza

Le difficoltà logiche e persino le contraddizioni con cui si scontrano i matematici, quando considerano quantità «infinitamente grandi» o «infinitamente piccole» diverse tra loro ed appartenenti pure ad ordini differenti, derivano unicamente dal fatto che costoro reputano infinito ciò che è semplicemente indefinito; è vero che, in generale, essi sembrano preoccuparsi assai poco di queste difficoltà, le quali nondimeno esistono e non sono per questo meno gravi, e fanno apparire la loro scienza colma di una folla di illogicità, o, se si preferisce, di «paralogismi», che la privano di ogni valore e di ogni portata seria agli occhi di coloro che non si lasciano illudere dalle parole. Ecco alcuni esempi delle contraddizioni introdotte da quanti ammettono l'esistenza di grandezze infinite, quando si tratti di applicare tale nozione alle grandezze geometriche: se si considera una linea, una retta ad esempio, come infinita, tale infinito dev'essere minore, ed anzi infinitamente minore, di quello costituito da una superficie, quale un piano, in cui tale linea è contenuta con un'infinità di altre, e questo secondo infinito sarà a sua volta infinitamente minore di quello dell'estensione a tre dimensioni. La possibilità stessa della coesistenza di tutti questi pretesi infiniti – alcuni dei quali lo sono al medesimo grado, altri a gradi differenti – dovrebbe bastare a provare che nessuno di essi può essere davvero infinito, persino in mancanza di ogni altra considerazione di ordine più propriamente metafisico; infatti, lo ripetiamo ancora poiché si tratta di verità sulle quali non si insisterà mai abbastanza, è evidente che, se si suppone una pluralità di infiniti distinti, ciascuno di essi si trova limitato dagli altri, il che significa che si escludono gli uni con gli altri. A dire il vero, del resto, gli «infinitisti» – sui quali questa accumulazione puramente verbale di una «infinità di infiniti» sembra produrre una sorta di «intossicazione mentale», se è permesso esprimersi così – non arretrano per nulla di fronte a simili contraddizioni, poiché, come abbiamo già detto, non hanno alcuna difficoltà ad ammettere che vi siano differenti numeri infiniti, e che, di conseguenza, un infinito possa essere maggiore o minore di un altro infinito; l'assurdità di tali enunciati è però fin troppo evidente, ed il fatto che siano di uso assai corrente nella matematica attuale non cambia nulla, ma mostra solamente fino a che punto il senso della più elementare logica sia perduto nella nostra epoca. Un'altra contraddizione, non meno manifesta delle precedenti, è quella che si presenta nel caso di una superficie chiusa, dunque evidentemente e visibilmente finita, che dovrebbe tuttavia contenere

un'infinità di linee, come ad esempio una sfera contenente un'infinità di cerchi; si avrebbe qui un contenente finito il cui contenuto sarebbe infinito, il che d'altronde accade parimenti quando si sostiene, come fa Leibnitz, l'«infinità attuale» degli elementi di un insieme continuo.

Non vi è al contrario alcuna contraddizione nell'ammettere la coesistenza di indefinitezze molteplici e di ordini differenti: così la linea, indefinita secondo una sola dimensione, può al riguardo essere considerata una indefinitezza semplice o del primo ordine; la superficie, indefinita secondo due dimensioni, e comprendente un'indefinitezza di linee indefinite, costituirà allora una indefinitezza del secondo ordine, mentre l'estensione a tre dimensioni, comprendente un'indefinitezza di superfici indefinite, costituirà una indefinitezza del terzo ordine. È essenziale sottolineare ancora una volta che diciamo che la superficie comprende un'indefinitezza di linee, ma non che essa è costituita da un'indefinitezza di linee, così come la linea non è composta di punti, ma ne comprende una moltitudine indefinita; lo stesso accade per il volume in rapporto alle superfici, l'estensione a tre dimensioni non essendo altro che un volume indefinito. D'altronde è questo, in fondo, ciò che abbiamo detto sopra riguardo agli «indivisibili» ed alla «composizione del continuo»; simili questioni, a causa della loro stessa complessità, sono tra quelle che rendono più evidente la necessità di un linguaggio rigoroso. In proposito aggiungeremo ancora che, se si può legittimamente considerare, da un certo punto di vista, la linea come generata da un punto, la superficie da una linea ed il volume da una superficie, ciò presuppone essenzialmente che tale punto, tale linea o tale superficie si spostino mediante un moto continuo, comprendente un'indefinitezza di posizioni successive; e ciò costituisce tutt'altra cosa dal considerare queste posizioni isolatamente le une dalle altre, ossia intendere i punti, le linee e le superfici come fissi e determinati, come costituenti rispettivamente parti o elementi della linea, della superficie e del volume, Parimenti, quando si considera, in senso inverso, una superficie come l'intersezione di due volumi, una linea come l'intersezione di due superfici ed un punto come l'intersezione di due linee, è chiaro che tali intersezioni non devono affatto essere concepite come parti comuni a questi volumi, a queste superfici o a queste linee; esse ne costituiscono solamente, come diceva Leibnitz, dei limiti o delle estremità.

Secondo quanto abbiamo appena detto, ciascuna dimensione introduce in qualche modo un nuovo grado di indeterminazione nell'estensione, ossia nel continuo spaziale visto come suscettibile di crescere indefinitamente in ampiezza, ottenendo così quelle che si potrebbero chiamare potenze successive dell'indefinito[1]; si può anche dire che un'indefinitezza di un certo ordine o di una certa potenza contiene una moltitudine indefinita di indefiniti di un ordine inferiore o di una potenza minore. Trattandosi

[1] Cfr *Le Symbolisme de la Croix*, cit., cap. XII.

soltanto, in tutto ciò, di indefinito, tutte queste considerazioni e quelle dello stesso genere sono dunque perfettamente accettabili; non vi è infatti alcuna incompatibilità logica tra indefinitezze molteplici e distinte, le quali, seppure indefinite, sono nondimeno di natura essenzialmente finita, quindi perfettamente suscettibili di coesistere, come altrettante possibilità particolari e determinate all'interno della Possibilità totale, che, sola, è infinita, perché identica al Tutto universale[2]. Tali considerazioni assumono una forma impossibile e assurda solo a causa della confusione tra indefinito e infinito; così, come accade per la «moltitudine infinita», anche questo è uno dei casi in cui la contraddizione inerente ad un preteso infinito determinato nasconde, deformandola fino a renderla irriconoscibile, un'altra idea che in sé non ha nulla di contraddittorio.

Abbiamo parlato di gradi differenti di indeterminazione delle quantità in senso crescente; mediante questa stessa nozione, intesa in senso decrescente, abbiamo già in precedenza giustificato la considerazione dei diversi ordini di quantità infinitesimali, la cui possibilità si comprende così ancor più facilmente osservando la correlazione da noi segnalata tra l'indefinitamente crescente e l'indefinitamente decrescente. Tra le quantità indefinite di ordini differenti, quelle di ordine diverso dal primo sono indefinite sia in rapporto a quelle degli ordini precedenti, sia in rapporto alle quantità ordinarie; è altrettanto legittimo considerare parimenti, in senso inverso, quantità infinitesimali di ordini differenti, quelle di ciascun ordine essendo infinitesimali non solo in rapporto alle quantità ordinarie, ma anche in rapporto alle quantità infinitesimali degli ordini precedenti[3]. Non vi è eterogeneità assoluta tra le quantità indefinite e le quantità ordinarie, e non ve n'è neppure tra queste ultime e le quantità infinitesimali; vi sono insomma solo differenze di grado, non di natura, poiché in realtà l'indefinito, di qualunque ordine ed a qualunque potenza esso sia, non ci farà mai uscire dal finito; è ancora la falsa concezione dell'infinito ad introdurre in apparenza, tra questi differenti ordini di quantità, un'eterogeneità radicale in fondo del tutto incomprensibile. Sopprimendo tale eterogeneità, si stabilisce qui una sorta di continuità, ben diversa però

---

[2] Cfr. *Les États multiples de l'être*, cit., cap. I.

[3] Riserviamo, come si fa d'altronde abitualmente, la denominazione di «infinitesimali», alle quantità indefinitamente decrescenti, escludendo le quantità indefinitamente crescenti, che, per brevità, possiamo chiamare semplicemente «indefinite»; è assai singolare che Carnot abbia riunito le une e le altre sotto lo stesso nome di «infinitesimali», il che è contrario non solo all'uso, ma al senso stesso che tale termine trae dalla sua formazione. Pur conservando il vocabolo «infinitesimale» dopo averne definito, come abbiamo fatto, il significato, non possiamo d'altronde dispensarci dal far notare che esso ha il grave difetto di derivare visibilmente dal vocabolo «infinito», il che lo rende ben poco adeguato all'idea che esprime realmente; per poterlo impiegare in tal senso senza inconvenienti, occorre in qualche modo dimenticare la sua origine, o per lo meno attribuire ad essa un carattere unicamente «storico», come di fatto proveniente dalla concezione che Leibnitz si formava delle sue «finzioni ben fondate».

da quella che Leibnitz immaginava tra le variabili ed i loro limiti, e molto meglio fondata nella realtà, poiché la distinzione tra quantità variabili e quantità fisse implica invece essenzialmente una vera e propria differenza di natura.

In tali condizioni le stesse quantità ordinarie, almeno quando si tratti di variabili, possono essere viste in qualche modo come infinitesimali rispetto a quantità indefinitamente crescenti, poiché, se una quantità può essere resa grande quanto si vuole rispetto ad un'altra, quest'ultima diviene inversamente, per ciò stesso, piccola quanto si vuole rispetto alla prima. Introduciamo la restrizione che debba trattarsi qui di variabili, perché una quantità infinitesimale deve sempre essere concepita come essenzialmente variabile, essendovi in ciò qualcosa che è veramente inerente alla sua natura; d'altronde, quantità che appartengano a due ordini differenti di indefinitezza sono necessariamente variabili l'una in rapporto all'altra, e questa proprietà di variabilità relativa e reciproca è perfettamente simmetrica, poiché, secondo quanto abbiamo appena detto, è lo stesso considerare una quantità come crescente indefinitamente rispetto ad un'altra, o quest'ultima come decrescente indefinitamente rispetto alla prima; senza questa variabilità relativa non vi sarebbero né incremento né decremento indefinito, ma solo rapporti definiti e determinati tra le due quantità.

Parimenti, allorché vi è un cambiamento di posizione tra due corpi A e B, è lo stesso dire, almeno finché non si consideri nient'altro che il cambiamento in sé, che il corpo A è in moto rispetto al corpo B, o, inversamente, che il corpo B è in moto rispetto al corpo A; a tale riguardo, la nozione di moto relativo non è meno simmetrica di quella di variabilità relativa che abbiamo qui esaminato. È per questo, secondo Leibnitz – il quale mostrava così l'insufficienza del meccanicismo cartesiano come teoria fisica avente la pretesa di fornire una spiegazione dei fenomeni naturali –, che non si può stabilire una distinzione tra uno stato di moto ed uno stato di quiete se ci si limita a considerare soltanto i cambiamenti di posizione; occorre perciò far intervenire qualcosa di un altro ordine, e cioè la nozione di forza, che costituisce la causa prossima di tali cambiamenti, la sola che possa essere attribuita ad un corpo anziché ad un altro, e che permetta di trovare in tale corpo ed in esso soltanto la vera ragione del cambiamento[4].

---

[4] Si veda Leibnitz, *Discours de Métaphysique*, 1686, cap. XVIII; [trad. it.: «Discorso di metafisica», *Scritti filosofici*. vol. I, UTET. Torino, 2000]; cfr. *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit., cap. XIV.

XXI - L'indefinito è inesauribile analiticamente

Nei due casi che abbiamo esaminato, quello dell'indefinitamente crescente e quello dell'indefinitamente decrescente, una quantità di un certo ordine può essere vista come la somma di un'indefinitezza di elementi, ciascuno dei quali costituisce una quantità infinitesimale in rapporto a detta somma. Affinché si possa parlare di quantità infinitesimali è d'altronde necessario che si tratti di elementi non determinati in rapporto alla loro somma, e così dev'essere, giacché tale somma è indefinita in rapporto agli elementi in questione; ciò risulta in maniera immediata dal carattere essenziale dell'indefinito, quest'ultimo implicando necessariamente, come abbiamo detto, l'idea di un «divenire», e di conseguenza una certa indeterminazione. È chiaro d'altronde che tale indeterminazione può essere relativa ed esistere solo da un certo punto di vista o rispetto ad una certa cosa: è il caso ad esempio di una somma la quale, essendo una quantità ordinaria non è indefinita in sé, ma solo in rapporto ai propri elementi infinitesimali; ma in ogni caso, se fosse altrimenti e non si facesse intervenire la nozione di indeterminazione, si sarebbe ricondotti semplicemente alla concezione degli «incomparabili», interpretata nel senso grossolano del granello di sabbia rispetto alla terra e della terra rispetto al firmamento.

La somma di cui parliamo non può assolutamente essere effettuata al modo di una somma aritmetica, poiché sarebbe necessario a tal fine che una serie indefinita di addizioni successive fosse portata a termine, il che è contraddittorio; nel caso in cui la somma sia una quantità ordinaria e determinata come tale, occorre evidentemente, come già abbiamo detto formulando la definizione di calcolo integrale, che il numero o piuttosto la moltitudine degli elementi cresca indefinitamente mentre la grandezza di ciascuno di essi decresce indefinitamente, e, in questo senso, l'indefinitezza di tali elementi è veramente inesauribile. Tuttavia, se la somma in questione non può essere effettuata in tal modo – come risultato finale di una moltitudine di operazioni distinte e successive –, può esserlo invece d'un sol colpo e mediante un'operazione unica, l'integrazione[1]; quest'ultima è

[1] I termini «integrale» ed «integrazione», il cui uso è prevalso, non sono di Leibnitz, ma di Jean Bernoulli; Leibnitz si serviva in tal senso dei termini «somma» e «sommazione», i quali hanno l'inconveniente di sembrare indicare un'assimilazione tra l'operazione di cui si tratta e la formazione di una somma aritmetica; diciamo soltanto sembrare, del resto, poiché

l'operazione inversa alla differenziazione, poiché ricostituisce la somma a partire dai suoi elementi infinitesimali, mentre la differenziazione procede al contrario dalla somma agli elementi, fornendo il mezzo per formulare la legge delle variazioni istantanee di una quantità la cui espressione è data.

Così, nel caso dell'indefinito, la nozione di somma aritmetica non è più applicabile, e si deve ricorrere a quella di integrazione per supplire all'impossibilità di «numerare» gli elementi infinitesimali, impossibilità che, beninteso, deriva dalla loro stessa natura, e non da un'imperfezione qualsiasi da parte nostra. Possiamo notare di sfuggita come vi sia in ciò, per quanto concerne l'applicazione alle grandezze geometriche – che costituisce in fondo la vera ragion d'essere di tutto il calcolo infinitesimale –, un metodo di misura totalmente diverso rispetto a quello abituale basato sulla divisione di una grandezza in porzioni definite, di cui abbiamo parlato in precedenza a proposito delle «unità di misura». Quest'ultimo riconduce sempre, in definitiva, a sostituire in qualche modo il discontinuo al continuo, mediante il «ritaglio» in porzioni uguali alla grandezza della stessa specie assunta come unità[2], onde poter applicare direttamente il numero alla misura delle grandezze continue, ciò che non si può fare effettivamente se non alterandone in tal modo la natura al fine di renderla, per così dire, assimilabile a quella del numero. L'altro metodo rispetta invece, per quanto possibile, il carattere proprio del continuo, considerandolo come una somma di elementi non più fissi e determinati, ma essenzialmente variabili, ed in grado di decrescere, nella loro variazione, al di sotto di ogni grandezza assegnabile, permettendo perciò di far variare la quantità spaziale tra limiti tanto ravvicinati quanto si voglia; ciò costituisce, tenuto conto della natura del numero che nonostante tutto non può essere cambiata, la rappresentazione meno imperfetta che si possa fornire di una variazione continua.

Queste osservazioni permettono di capire in maniera più precisa in che senso si possa dire, come abbiamo fatto all'inizio, che i limiti dell'indefinito non possono mai essere raggiunti mediante un procedimento analitico, o, in altri termini, che l'indefinito non è inesauribile assolutamente ed in qualsiasi modo, ma per lo meno inesauribile analiticamente. Dobbiamo naturalmente considerare analitico, a questo proposito, il procedimento che consisterebbe, per ricostituire un tutto, nel prendere i suoi elementi distintamente e successivamente: tale è il procedimento di formazione di una somma aritmetica, ed è proprio in questo che l'integrazione ne differisce essenzialmente. Ciò è particolarmente interessante dal nostro punto di vista,

---

è ben certo che la differenza essenziale tra queste due operazioni non è realmente potuta sfuggire a Leibnitz.

[2] O ad una frazione di tale grandezza, ma poco importa, tale frazione costituendo allora un'unità secondaria più piccola, che si sostituisce alla prima nel caso in cui la divisione per quest'ultima non si effettui esattamente, al fine di ottenere un risultato esatto o almeno più approssimato.

poiché, tramite un esempio chiarissimo, si vede quali siano i veri rapporti tra l'analisi e la sintesi: contrariamente all'opinione corrente secondo cui l'analisi sarebbe in qualche modo preparatoria alla sintesi e ad essa condurrebbe – tanto che occorrerebbe sempre cominciare dall'analisi anche quando non si intenda limitarvisi –, la verità è che non si può mai pervenire effettivamente alla sintesi partendo dall'analisi; ogni sintesi, nel senso vero della parola, è per così dire qualcosa d'immediato, non preceduto da alcuna analisi e da essa del tutto indipendente, così come l'integrazione è un'operazione che si effettua d'un sol colpo e non presuppone affatto l'esame di elementi paragonabili a quelli di una somma aritmetica; e, come quest'ultima non può fornire il mezzo per raggiungere ed esaurire l'indefinito, così vi sono, in tutti i domini, cose che resistono per loro stessa natura ad ogni analisi e la cui conoscenza non è possibile se non mediante la sola sintesi[3].

[3] Qui ed in ciò che seguirà dev'essere ben chiaro che assumiamo i termini «analisi» e «sintesi» nella loro accezione vera ed originaria, che occorre distinguere accuratamente da quella, del tutto diversa ed assai impropria, in cui si parla correntemente di «analisi matematica», e secondo cui la stessa integrazione, a dispetto del suo carattere essenzialmente sintetico, è vista come facente parte di quella che è chiamata «analisi infinitesimale»; è d'altronde per tale ragione che preferiamo evitare l'impiego di quest'ultima espressione, e servirci solamente di quelle di «calcolo infinitesimale» e di «metodo infinitesimale», le quali per lo meno non si prestano ad equivoci di questo genere.

XXII - Carattere sintetico dell'integrazione

Al contrario della formazione di una somma aritmetica – che, come dicevamo poc'anzi, possiede un carattere propriamente analitico –, l'integrazione dev'essere considerata un'operazione essenzialmente sintetica, in quanto avviluppa simultaneamente tutti gli elementi della somma da calcolare, conservando tra essi l'«indistinzione» che conviene alle parti del continuo, giacché queste ultime, a causa della natura stessa del continuo, non possono costituire qualcosa di fisso e determinato. D'altronde, la stessa «indistinzione» dev'essere parimenti mantenuta, sebbene per una ragione un po' differente, riguardo agli elementi discontinui che formano una serie indefinita qualora si voglia calcolarne la somma, poiché, se la grandezza di ciascun elemento è allora concepita come determinata, il loro numero non lo è, e possiamo anzi dire più esattamente che la loro moltitudine oltrepassa ogni numero; vi sono tuttavia casi in cui la somma degli elementi di una tale serie tende ad un certo limite definito quando la loro moltitudine cresca indefinitamente. Si potrebbe dire, benché tale maniera di esprimersi appaia forse a prima vista un po' strana, che una simile serie discontinua sia indefinita per «estrapolazione», mentre un insieme continuo lo sia per «interpolazione»; con questo intendiamo dire che, se si prende in una serie discontinua una porzione compresa tra due termini qualunque, non vi è in essa nulla di indefinito, essendo tale porzione determinata sia nel suo insieme sia nei suoi elementi, ed è invece estendendosi al di là di tale porzione senza mai arrivare ad un ultimo termine che questa serie è indefinita; al contrario, in un insieme continuo, determinato come tale, l'indefinito si trova compreso all'interno stesso di questo insieme, poiché gli elementi non sono determinati, ed essendo il continuo sempre divisibile non vi sono in esso ultimi elementi; così, sotto tale aspetto, questi due casi costituiscono in qualche modo l'inverso l'uno dell'altro. La sommazione di una serie numerica indefinita non avrebbe mai fine se tutti i termini dovessero essere presi ad uno ad uno, non essendovi ultimo termine al quale si possa giungere; quindi, nel caso in cui una tale sommazione sia possibile, potrà esserlo soltanto mediante un procedimento sintetico, il quale ci fa in qualche modo afferrare d'un sol colpo tutta un'indefinitezza considerata nel suo insieme, senza che ciò presupponga affatto l'esame distinto dei suoi elementi, del resto impossibile per il fatto stesso di essere in moltitudine indefinita. Parimenti, allorché una serie indefinita ci è data implicitamente tramite la sua legge di formazione – di

cui abbiamo visto un esempio nel caso della serie dei numeri interi –, possiamo dire che essa ci è data così tutta intera sinteticamente, e non può esserlo altrimenti; dare una tale serie analiticamente, infatti, significherebbe darne distintamente tutti i termini, il che costituisce un'impossibilità. Pertanto, qualora si debba considerare un'indefinitezza qualunque, sia quella di un insieme continuo, sia quella di una serie discontinua, si dovrà in ogni caso ricorrere ad un'operazione sintetica per poterne raggiungere i limiti; una progressione per gradi sarebbe qui priva di effetto e non potrebbe mai consentirci di pervenirvi, poiché una simile progressione non può giungere ad un termine finale se non alla duplice condizione che questo termine ed il numero dei gradi da percorrere per raggiungerlo siano entrambi determinati. Per questo non abbiamo detto che i limiti dell'indefinito non si possano raggiungere in alcun modo – impossibilità d'altronde ingiustificabile dal momento che tali limiti esistono –, ma soltanto che non possono esserlo analiticamente: una indefinitezza non può essere esaurita per gradi, ma può essere compresa nel suo insieme mediante una di quelle operazioni trascendenti di cui l'integrazione ci fornisce il tipo nell'ordine matematico. Si può notare che la progressione per gradi corrisponderebbe qui alla variazione stessa della quantità, in modo diretto nel caso delle serie discontinue, e, per quanto concerne una variazione continua, seguendola per così dire nella misura permessa dalla natura discontinua del numero; mediante un'operazione sintetica, invece, ci si pone immediatamente al di fuori ed al di là della variazione, e così dev'essere necessariamente, secondo quanto abbiamo detto sopra, affinché il «passaggio al limite» possa essere realizzato effettivamente; in altri termini, l'analisi non raggiunge che le variabili, colte nel corso stesso della loro variazione, mentre soltanto la sintesi ne raggiunge i limiti, il che costituisce qui l'unico risultato definitivo e realmente valido, in quanto occorre necessariamente, perché si possa parlare di un risultato, giungere a qualcosa che si riferisca esclusivamente a quantità fisse e determinate.

Si potrebbe d'altronde trovare, beninteso, l'analogo di tali operazioni sintetiche in domini diversi da quello della quantità, poiché è chiaro che l'idea di uno sviluppo indefinito di possibilità è parimenti applicabile a tutt'altra cosa che alla quantità, ad esempio a uno stato qualunque di esistenza manifestata, e alle condizioni, quali che siano, cui questo stato è sottomesso, che si consideri l'insieme cosmico in generale o un essere particolare, ponendosi cioè dal punto di vista «macrocosmico» o dal punto di vista «microcosmico»[1]. Si potrebbe dire che il «passaggio al limite» corrisponde qui alla fissazione definitiva dei risultati della manifestazione nell'ordine principiale; solo così, infatti, l'essere sfugge finalmente al cambiamento o al «divenire», necessariamente inerente ad ogni

[1] Su tale applicazione analogica della nozione di integrazione, cfr. *Le Symbolisme de la Croix*, cit., capp. XVIII e XX.

manifestazione in quanto tale; si vede allora come questa fissazione non costituisca in alcun modo un «ultimo termine» dello sviluppo della manifestazione, ma si situi essenzialmente al di fuori e al di là di tale sviluppo, poiché appartiene ad un altro ordine di realtà, trascendente rispetto alla manifestazione e al «divenire»; la distinzione tra l'ordine manifestato e l'ordine principiale corrisponde dunque analogicamente, a questo proposito, a quello da noi stabilito tra il dominio delle quantità variabili e quello delle quantità fisse. Inoltre, trattandosi di quantità fisse, è evidente che nessuna modificazione può esservi introdotta mediante una qualsivoglia operazione, e di conseguenza il «passaggio al limite» non ha come effetto quello di produrre qualcosa in tale dominio, ma solamente di fornircene la conoscenza; parimenti, essendo l'ordine principiale immutabile, per pervenirvi non si tratta di «effettuare» qualcosa che non esisterebbe ancora, bensì di prendere effettivamente coscienza di ciò che è, in modo permanente ed assoluto. Abbiamo dovuto naturalmente, dato l'argomento di questo studio, esaminare in modo particolare ed in primo luogo ciò che si riferisce propriamente al dominio quantitativo, nel quale l'idea di sviluppo delle possibilità si traduce, come abbiamo visto, in una nozione di variazione, sia nel senso dell'indefinitamente crescente, sia in quello dell'indefinitamente decrescente; queste poche indicazioni mostreranno però che tutte queste cose sono suscettibili di ricevere, mediante una trasposizione analogica appropriata, una portata incomparabilmente maggiore di quella che sembrano avere in se stesse, poiché, in virtù di una simile trasposizione, l'integrazione e le altre operazioni dello stesso genere appaiono veramente come un simbolo della «realizzazione» metafisica stessa.

Si vede così tutta la differenza che intercorre tra la scienza tradizionale, che permette simili considerazioni, e la scienza profana dei moderni; a tale proposito aggiungeremo ancora un'altra osservazione, che si riferisce direttamente alla distinzione tra conoscenza analitica e conoscenza sintetica. La scienza profana, in effetti, è essenzialmente ed esclusivamente analitica; non considera mai i principi, e si perde nel dettaglio dei fenomeni, la cui moltitudine indefinita ed indefinitamente cangiante è per essa veramente inesauribile, cosicché non può mai pervenire, in quanto conoscenza, ad alcun risultato reale e definitivo; essa si limita esclusivamente ai fenomeni, ossia alle apparenze esteriori, ed è incapace di afferrare il fondo delle cose, come Leibnitz già rimproverava al meccanicismo cartesiano. In ciò risiede del resto una delle ragioni per cui si spiega l'«agnosticismo» moderno, poiché, essendovi cose che non possono essere conosciute se non sinteticamente, chiunque proceda soltanto mediante l'analisi è indotto per ciò stesso a dichiararle «inconoscibili» – e lo sono infatti in tale maniera –, al pari di colui che, limitandosi ad una visione analitica dell'indefinito, può crederlo assolutamente inesauribile, mentre in realtà lo è solo analiticamente. È vero che la conoscenza sintetica è essenzialmente quel che si può chiamare una conoscenza «globale», come lo è quella di un insieme

continuo o di una serie indefinita i cui elementi non sono e non possono essere dati distintamente; ma, oltre al fatto che è questo in fondo ciò che importa veramente, si può sempre – giacché tutto vi è contenuto in principio – ridiscendere a considerare le cose particolari che si vorrà, così come, se ad esempio una serie indefinita è data sinteticamente mediante la conoscenza della sua legge di formazione, quando si presenti il caso si può sempre calcolare in particolare uno qualsiasi dei suoi termini; al contrario, partendo da queste stesse cose particolari viste in se stesse e nel loro dettaglio indefinito, non si può mai elevarsi ai principi; in questo, come dicevamo all'inizio, il punto di vista ed il marchio della scienza tradizionale sono in qualche modo l'inverso di quelli della scienza profana, come la sintesi stessa è l'inverso dell'analisi. Ciò costituisce d'altronde un'applicazione della verità evidente secondo la quale, se si può trarre il «meno» dal «più», non si può mai, al contrario, far uscire il «più» dal «meno»; eppure è questo che pretende di fare la scienza moderna, con le sue concezioni meccaniciste e materialiste ed il suo punto di vista esclusivamente quantitativo ma, proprio perché si tratta di un'impossibilità, essa è in realtà incapace di fornire la vera spiegazione di alcunché[2].

---

[2] Su quest'ultimo punto ci si potrà riferire ancora alle considerazioni da noi esposte in *Le Règne de la Quantité et les Signes des Ternps*, cit.

XXIII - Gli argomenti di Zenone d'Elea

Le precedenti considerazioni contengono implicitamente la soluzione a tutte le difficoltà del genere di quelle che Zenone d'Elea, tramite i suoi celebri argomenti opponeva alla possibilità del moto, almeno in apparenza e a giudicare soltanto dalla forma in cui tali argomenti sono presentati abitualmente, poiché è possibile dubitare che fosse questo in fondo il loro vero significato. È poco verosimile, infatti, che Zenone abbia avuto realmente intenzione di negare il moto; sembra più probabile che abbia voluto solo provarne l'incompatibilità con la supposizione, ammessa specialmente dagli atomisti, di una molteplicità reale ed irriducibile esistente nella natura delle cose. È dunque contro una molteplicità così concepita che tali argomenti dovettero in realtà essere diretti in origine; non diciamo contro ogni molteplicità, poiché va da sé che anche la molteplicità esiste nel proprio ordine, al pari del moto, il quale del resto, come ogni cambiamento, di qualunque genere sia, la presuppone necessariamente; ma, così come il moto, in ragione del suo carattere di modificazione transitoria e momentanea, non può essere sufficiente a se stesso – e non sarebbe che una pura illusione se non si ricollegasse ad un principio superiore, trascendente rispetto ad esso, quale il «motore immobile» di Aristotele –, così la molteplicità sarebbe veramente inesistente se fosse ridotta a se stessa e non procedesse dall'unità, ciò di cui si ha un'immagine matematica, come abbiamo visto, nella formazione della serie dei numeri. Inoltre, la supposizione di una molteplicità irriducibile esclude necessariamente ogni legame reale tra gli elementi delle cose, e di conseguenza ogni continuità, questa non essendo altro che un caso particolare o una forma speciale di un tale legame; e l'atomismo appunto, come abbiamo già detto in precedenza, implica necessariamente la discontinuità di ogni cosa; è con questa discontinuità, in definitiva, che il moto è realmente incompatibile, e vedremo che proprio questo mostrano in effetti gli argomenti di Zenone.

Si fa, ad esempio, un ragionamento come il seguente: un mobile non potrà mai passare da una posizione ad un'altra, perché tra queste due posizioni, per quanto vicine, ve ne saranno sempre, si dice, un'infinità di altre che dovranno essere percorse successivamente nel corso del moto, cosicché, qualunque sia il tempo impiegato a percorrerle, questa infinità non potrà mai essere esaurita. Sicuramente non può qui trattarsi, come si dice, di un'infinità, cosa in realtà priva di senso; è vero nondimeno che si può considerare, in ogni intervallo, una reale indefinitezza di posizioni del

mobile, indefinitezza non esauribile in effetti nella maniera analitica consistente nell'occuparle distintamente ad una ad una, al modo in cui si prenderebbero ad uno ad uno i termini di una serie discontinua. Sennonché, è proprio questa concezione del moto ad essere erronea, perché equivale insomma a ritenere il continuo composto di punti, o di ultimi elementi indivisibili, come nella concezione dei corpi composti di atomi; ciò significa in realtà che non vi è del continuo, poiché, si tratti di punti o di atomi, questi ultimi elementi non possono che essere discontinui; d'altra parte, è vero che senza continuità non vi sarebbe moto possibile, e questo è tutto ciò che tale argomento prova effettivamente. Lo stesso dicasi per l'argomento della freccia che vola ed è tuttavia immobile, perché ad ogni istante non la si vede che in una sola posizione, il che significa supporre che ciascuna posizione possa essere considerata in se stessa fissa e determinata, cosicché le posizioni successive formerebbero una sorta di serie discontinua. Occorre d'altronde osservare che non è vero, in realtà, che un mobile sia mai visto come se occupasse una posizione fissa, ed anzi, al contrario, quando il moto è abbastanza rapido, si giunge a non vedere più distintamente il mobile stesso, ma soltanto una sorta di traccia del suo spostamento continuo: così, ad esempio, se si fa ruotare rapidamente un tizzone infuocato, non si vede più la forma del tizzone, ma soltanto un cerchio di fuoco; che si spieghi questo fatto con la persistenza delle immagini retiniche, come fanno i fisiologi, o in qualsiasi altro modo poco importa, non essendo meno manifesto che, in simili casi, si coglie in qualche modo direttamente ed in maniera sensibile la continuità stessa del moto. Inoltre, quando si dice, nel formulare un tale argomento, «ad ogni istante», si suppone che il tempo sia formato da una serie di istanti indivisibili, a ciascuno dei quali corrisponderebbe una posizione determinata del mobile; ma, in realtà, il continuo temporale non è composto di istanti più di quanto il continuo spaziale sia composto di punti, e, come abbiamo già indicato, occorre la riunione o piuttosto la combinazione delle due continuità del tempo e dello spazio per dar conto della possibilità del moto.

Si dirà ancora che, per percorrere una certa distanza, occorre percorrerne prima la metà, poi la metà dell'altra metà, poi la metà di ciò che rimane, e così di seguito indefinitamente[1], cosicché ci si troverà sempre in presenza di un'indefinitezza la quale, intesa in tal modo, sarà in effetti inesauribile. Un altro argomento pressoché equivalente è il seguente: se si suppongono due mobili separati da una certa distanza, uno dei due, per quanto più veloce dell'altro, non potrà mai raggiungerlo, poiché, quando giungerà al punto in cui si trovava quest'ultimo, l'altro sarà in una seconda posizione, separata dalla prima da una distanza minore della distanza

[1] Ciò corrisponde ai termini successivi della serie indefinita $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$, fornita come esempio da Leibnitz in un passaggio da noi citato sopra.

iniziale; quando arriverà a questa seconda posizione, l'altro sarà in una terza, separato dalla seconda da una distanza ancora minore, e così di seguito indefinitamente, tanto che la distanza tra questi due mobili, sebbene continuamente decrescente, non diverrà mai nulla. Il difetto essenziale sia di questi argomenti sia del precedente consiste nella supposizione che, per raggiungere un certo termine, debbano essere percorsi distintamente e successivamente tutti i gradi intermedi. Ora, delle due l'una: o il moto in questione è davvero continuo, e allora non può essere scomposto in tal maniera, non avendo il continuo ultimi elementi; oppure esso è composto da una successione discontinua di intervalli – o che può per lo meno essere considerata tale –, ciascuno dei quali ha una grandezza determinata, come il passo di un uomo in marcia[2], e allora la considerazione di questi intervalli sopprime evidentemente quella di tutte le posizioni intermedie possibili, le quali non devono essere percorse effettivamente come altrettante tappe distinte. Inoltre, nel primo caso, che è propriamente quello di una variazione continua, il termine di tale variazione, supposto fisso per definizione, non può essere raggiunto nella variazione stessa, ed il fatto di raggiungerlo effettivamente esige l'introduzione di un'eterogeneità qualitativa, che costituisce stavolta una vera discontinuità, e si traduce qui nel passaggio dallo stato di moto allo stato di quiete; questo ci riconduce alla questione del «passaggio al limite», di cui dobbiamo ancora precisare compiutamente la vera nozione.

---

[2] In realtà i movimenti di cui si compone la marcia sono continui quanto ogni altro moto, ma i punti in cui l'uomo tocca il suolo formano una serie discontinua, in maniera tale che ogni passo segna un intervallo determinato, cosicché la distanza percorsa può essere scomposta in tali intervalli, il suolo non essendo d'altronde toccato in alcun punto intermedio.

XXIV - Vera concezione del passaggio al limite

La considerazione del «passaggio al limite» è necessaria, come abbiamo detto, se non per le applicazioni pratiche del metodo infinitesimale, almeno per la sua giustificazione teorica, e tale giustificazione è la sola cosa che qui ci importi, poiché semplici regole pratiche per il calcolo, efficaci in maniera in qualche modo «empirica» e senza che si sappia bene per quale ragione, sono evidentemente del tutto prive d'interesse dal nostro punto di vista. Senza dubbio non si ha alcun bisogno, per effettuare i calcoli ed anche per condurli a termine, di chiedersi se la variabile raggiunga il suo limite e come possa raggiungerlo; tuttavia, se essa non lo raggiunge, tali calcoli non avranno altro valore che quello di semplici calcoli d'approssimazione. È vero che si tratta in questo caso di un'approssimazione indefinita, poiché la natura stessa delle quantità infinitesimali permette di rendere l'errore piccolo quanto si vuole, senza però che sia possibile per questo sopprimerlo interamente, dato che queste stesse quantità infinitesimali, nel loro decremento indefinito, non divengono mai nulle. Si dirà forse che ciò costituisce in pratica l'equivalente di un calcolo del tutto rigoroso; ma, a parte il fatto che non è di questo che si tratta per noi, tale approssimazione indefinita può conservare un senso se, nei risultati cui si deve giungere, non si devono più considerare variabili, ma unicamente quantità fisse e determinate? In tali condizioni non si può, dal punto di vista dei risultati, sfuggire a questa alternativa: o il limite non è raggiunto, e allora il calcolo infinitesimale è soltanto il meno rozzo dei metodi di approssimazione; o il limite è raggiunto, e allora si ha a che fare con un metodo veramente rigoroso. Abbiamo visto però che il limite, per definizione, non può mai essere raggiunto esattamente dalla variabile; come potremo allora affermare che ciononostante possa essere raggiunto? Può esserlo, per l'appunto, non nel corso del calcolo, ma nei risultati, dovendo figurare in questi ultimi non più variabili, ma solamente quantità fisse e determinate come il limite stesso; quindi, è proprio la distinzione tra quantità variabili e quantità fisse, distinzione d'altronde propriamente qualitativa, a costituire, come abbiamo già detto, la sola vera giustificazione del rigore del calcolo infinitesimale.

Così, lo ripetiamo ancora, il limite non può essere raggiunto nella variazione e come termine di questa; esso non costituisce l'ultimo valore che deve assumere la variabile, e la concezione di una variazione continua che raggiunga un «ultimo valore» o un «ultimo stato» sarebbe incomprensibile e contraddittoria quanto quella di una serie indefinita che

raggiungesse un «ultimo termine», o quella della divisione di un insieme continuo che raggiungesse «ultimi elementi». Il limite non appartiene dunque alla serie dei valori successivi della variabile; esso è al di fuori di tale sede, e per questo abbiamo affermato che il «passaggio al limite» implica essenzialmente una discontinuità. Se fosse altrimenti saremmo in presenza di un'indefinitezza esauribile analiticamente, il che non può aver luogo; ma è qui che la distinzione da noi stabilita al riguardo assume tutta la sua importanza, perché ci troviamo in uno dei casi in cui si tratta di raggiungere, secondo l'espressione che abbiamo già impiegato, i limiti di una certa indefinitezza; non è dunque senza motivo che lo stesso termine «limite» si ritrova, con un'accezione più speciale, nel caso particolare che stiamo esaminando. Il limite di una variabile deve veramente limitare, nel senso generale del termine, l'indefinitezza degli stati o delle modificazioni possibili che la definizione di detta variabile comporta; proprio per questo occorre necessariamente che si trovi al di fuori di ciò che esso deve in tal modo limitare. Non può affatto trattarsi di esaurire tale indefinitezza nel corso stesso della variazione che la costituisce; si tratta invece, in realtà, di passare al di là del dominio della variazione, nel quale il limite non si trova compreso, e questo risultato è ottenuto non analiticamente e per gradi, ma sinteticamente e d'un sol colpo, in maniera in qualche modo «improvvisa», mediante la quale si traduce la discontinuità che si produce allora col passaggio dalle quantità variabili alle quantità fisse[1].

Il limite appartiene essenzialmente al dominio delle quantità fisse: perciò il «passaggio al limite» esige logicamente la considerazione simultanea, nella quantità, di due modalità differenti e in qualche modo sovrapposte; esso allora non costituisce altro che il passaggio alla modalità superiore, nella quale è pienamente realizzato ciò che nella modalità inferiore esiste solo allo stato di semplice tendenza, vero e proprio passaggio dalla potenza all'atto, per impiegare la terminologia aristotelica, il che non ha sicuramente nulla in comune con la semplice «compensazione di errori» concepita da Carnot. La nozione matematica di limite implica, per definizione, un carattere di stabilità e di equilibrio, carattere proprio a qualcosa di permanente e definitivo, non realizzabile evidentemente mediante quantità considerate, nella loro modalità inferiore, come essenzialmente variabili; il limite dunque non può mai essere raggiunto gradualmente, ma lo è immediatamente tramite il passaggio da una modalità all'altra, il che permette di sopprimere tutti gli stadi intermedi di cui comprende ed avviluppa sinteticamente tutta l'indefinitezza, e mediante il quale ciò che era e non poteva essere che una tendenza nelle variabili si afferma e si fissa in un risultato reale e definito. Diversamente il «passaggio

---

[1] Si potrà qui ricordare, a proposito di questo carattere «improvviso» o «istantaneo» e a titolo di paragone con l'ordine dei fenomeni naturali, l'esempio della rottura di una corda che abbiamo dato in precedenza: anche tale rottura è il limite della tensione, ma non è in alcun modo assimilabile ad una tensione di un qualsiasi grado.

al limite» costituirebbe un'illogicità pura e semplice, essendo evidente che, finché si rimane nel dominio delle variabili, non si può ottenere quella fissità propria del limite, ove le quantità che erano considerate in precedenza come variabili hanno appunto perduto tale carattere transitorio e contingente. Lo stato delle quantità variabili è, infatti, uno stato eminentemente transitorio ed in qualche modo imperfetto, non costituendo che l'espressione di un «divenire», di cui abbiamo parimenti ritrovato l'idea alla base della nozione stessa di indefinitezza, strettamente connessa a tale stato di variazione. Così il calcolo non può essere perfetto, nel senso di veramente compiuto, se non quando sia pervenuto a risultati nei quali non vi sia più nulla né di variabile né di indefinito, ma solamente quantità fisse e definite; e abbiamo già visto come ciò sia suscettibile di applicarsi, per trasposizione analogica, al di là dell'ordine quantitativo, il quale non ha più allora che un valore di simbolo, e finanche in ciò che concerne direttamente la «realizzazione» metafisica dell'essere.

XXV - Conclusione

Non è necessario insistere sull'importanza che le considerazioni da noi esposte nel corso di questo studio presentano dal punto di vista propriamente matematico, in quanto apportano la soluzione a tutte le difficoltà sollevate a proposito del metodo infinitesimale, sia riguardo al suo vero significato, sia riguardo al suo rigore. La condizione necessaria e sufficiente affinché tale soluzione possa essere data non è altro che la stretta applicazione dei veri principi; ma sono appunto i principi che i matematici moderni, come gli altri scienziati profani, ignorano interamente, e questa ignoranza è in fondo la sola ragione di tante discussioni che, in tali condizioni, possono proseguire indefinitamente senza mai giungere ad alcuna conclusione valida, non facendo al contrario che ingarbugliare ulteriormente le questioni e moltiplicare le confusioni, come la disputa tra «finitisti» ed «infinitisti» mostra fin troppo bene; eppure sarebbe stato molto facile tagliar corto se si fosse saputo porre nettamente, innanzitutto, la vera nozione dell'infinito metafisico e la distinzione fondamentale tra l'infinito e l'indefinito. Lo stesso Leibnitz, se ha avuto almeno il merito di abbordare francamente certe questioni – ciò che quanti sono venuti dopo di lui non hanno fatto –, ha detto troppo spesso su tale argomento cose ben poco metafisiche, ed anzi talvolta quasi nettamente antimetafisiche quanto le speculazioni ordinarie della generalità dei filosofi moderni; è dunque già la medesima mancanza di principi ad avergli impedito di rispondere ai suoi contraddittori in maniera soddisfacente e in qualche modo definitiva, aprendo così le porte a tutte le discussioni ulteriori. Senza dubbio si può dire con Carnot che, «se Leibnitz si è sbagliato, è unicamente nell'esprimere dubbi sull'esattezza della sua analisi, ammesso che abbia realmente avuto questi dubbi»[1]; tuttavia, anche se in fondo non li aveva, non poteva in ogni caso dimostrare rigorosamente tale esattezza, poiché la sua concezione della continuità, sicuramente né metafisica e neppure logica, gli impediva di operare al riguardo le distinzioni necessarie, e di conseguenza di formulare la nozione precisa di limite, che, come abbiamo mostrato, è di capitale importanza per il fondamento del metodo infinitesimale.

Si vede dunque da tutto ciò quale interesse possa avere la considerazione dei principi, persino per una scienza speciale intesa in sé, e senza che ci si proponga di andare, appoggiandosi ad essa, più in là del

[1] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, cit., p. 33.

dominio relativo e contingente cui si applica in maniera immediata; questo, beninteso, è ciò che disconoscono totalmente i moderni, i quali si vantano volentieri di avere, con la loro concezione profana della scienza, reso quest'ultima indipendente dalla metafisica e persino dalla teologia[2], mentre la verità è che in tal modo non hanno fatto altro che privarla di ogni valore reale in quanto conoscenza. Inoltre, se si comprendesse la necessità di ricollegare la scienza ai principi, va da sé che non vi sarebbe più alcuna ragione di limitarsi ad essa, e si sarebbe del tutto naturalmente ricondotti alla concezione tradizionale secondo cui una scienza particolare, quale che sia, vale meno per ciò che costituisce in sé che per la possibilità di servirsene come di un «supporto» per elevarsi ad una conoscenza di ordine superiore[3]. Abbiamo voluto appunto fornire qui, tramite un esempio caratteristico, un'idea di ciò che sarebbe possibile fare, almeno in certi casi, per restituire ad una scienza mutilata e deformata dalle concezioni profane il suo valore e la sua portata reali, sia dal punto di vista della conoscenza relativa che rappresenta direttamente, sia da quello della conoscenza superiore cui è suscettibile di condurre per trasposizione analogica; si è potuto vedere in particolare ciò che è possibile trarre, sotto quest'ultimo aspetto, da nozioni quali quella di integrazione e di «passaggio al limite».

Occorre d'altronde osservare che la matematica, più di ogni altra scienza, fornisce così un simbolismo particolarmente atto all'espressione delle verità metafisiche, nella misura in cui sono esprimibili, come possono rendersene conto coloro che hanno letto alcune delle nostre precedenti opere; è per questo che il simbolismo matematico è di uso così frequente, sia dal punto di vista tradizionale in generale, sia dal punto di vista iniziatico in particolare[4]. È chiaro però che, affinché possa essere così, occorre innanzitutto che tali scienze siano sbarazzate dagli errori e dalle confusioni molteplici introdotte dalle vedute false dei moderni, e noi saremmo felici se il presente lavoro potesse almeno contribuire in qualche modo a questo risultato.

---

[2] Ricordiamo di aver visto da qualche parte uno «scientista» contemporaneo indignarsi che si sia potuto ad esempio, nel medioevo, trovare il modo di parlare della Trinità a proposito della geometria del triangolo; d'altronde, egli probabilmente non sospettava che sia ancora così attualmente nel simbolismo del Compagnonaggio.

[3] In proposito si veda ad esempio, sull'aspetto esoterico ed iniziatico delle «arti liberali» del medioevo, *L'ésotérisme de Dante*, Ch. Bosse, Paris, 1925, pp. 10-15; [trad. it.: *L'esoterismo di Dante*, Adelphi, Milano, 2001].

[4] Sulle ragioni di questo valore tutto speciale che possiede in proposito il simbolismo matematico, tanto numerico quanto geometrico, si potranno vedere in particolare le spiegazioni da noi fornite nel volume *Le Règne de la Quantité et les Signes des Temps*, cit.